В.В. Михайленко, Л.Д. Добряков

Вища математика

Книга 1

Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів

ЖДТУ

2004

УДК 519.21
М 69

В.В. Михайленко, Л.Д. Добряков

Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Підручник. – Житомир: ЖДТУ, 2004 – 554 с.

ISBN 966-683-081-7

Викладено у доступній і, водночас, достатньо строгій формі основні розділи об’єднаного курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Для студентів денних та заочних відділень технічних університетів.

Іл.: 313. – Табл.: 23.

Рецензенти: доктор фіз.-мат. наук, професор *В.В. Кириченко*,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент *В.В. Плахотник*

УДК 519.21

ISBN 966-683-081-7

ПЕРЕДМОВА

Автори книги поставили за мету написати підручник з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, який би, по-перше, враховував специфіку підготовки спеціалістів у сфері технічних наук, а, по-друге, активізував самостійну роботу студентів з цих розділів математики. Зміст і порядок викладу матеріалу підручника цілком підпорядковані досягненню цієї мети.

В основу підручника покладено курси лекцій, які читаються авторами протягом ряду років на різних факультетах Житомирського державного технологічного університету (ЖДТУ), а також матеріал спецкурсів з вищої математики, що читаються на факультеті інженерно-комп'ютерних технологій.

Уже перші заняття з лінійної алгебри викликають у студентів-першокурсників значні труднощі не лише логічного, а й психологічного характеру. Студент зустрічається з великою кількістю нових понять і об'єктів, властивості яких досить незвичні. Наприклад, виявляється, що множення матриць не є комутативним. Тому, розв'язуючи матричні рівняння, доводиться бути досить обережним при множенні обох частин рівняння, чітко розрізняючи множення зліва від множення справа. Подібного роду ситуації зустрічаються досить часто і змушують студента не лише прикладати зусилля на здобуття нових знань, а й ставлять його перед необхідністю критичного перегляду раніше отриманих алгебраїчних відомостей з тим, щоб відмовитись від деяких, здавалось, вельми стійких положень. Поряд з відміченими труднощами в опануванні теоретичної частини курсу потрібно здолати труднощі у засвоєнні цілого ряду алгоритмів і формуванні твердих навичок їх застосування до розв'язування задач.

Виходячи зі сказаного, основною вимогою при написанні даного підручника була його доступність кожному студенту незалежно від рівня його елементарної математичної культури за умови, що цей студент хоче займатися математикою.

Окреслені вище обставини спонукали нас до свідомої відмови від лаконічного та словескупого викладу матеріалу, що призвело до деякого збільшення обсягу книги. Це, на нашу думку, не лише полегшить засвоєння матеріалу, а й буде сприяти виникненню потреби у самостійній роботі над книгою. При цьому від читача не вимагається якої-небудь додаткової математичної підготовки, яка б виходила за межі шкільного курсу математики.

Передусім автори намагались максимально доступно і в той же час достатньо строго подавати як принципові ідеї та найважливіші поняття, так і фактичний матеріал, відбираючи найбільш прості і наочні способи доведень багатьох теорем. Для досягнення цієї педагогічної мети автори не наводили всюди неодмінно оригінальні доведення та аргументацію, а вважали найдоцільнішим широко використовувати багату літературу з даного курсу.

Вивчення математики неможливе без оволодіння тими, хто навчається, основними логічними засобами математичних міркувань і, насамперед, такими поняттями математичної логіки, як необхідні та достатні умови. Тому автори вважали доцільним перед викладом основного матеріалу розглянути ці та деякі інші важливі поняття загальноматематичного характеру у вступі до книги.

При викладі основного матеріалу книги в ряді глав використовуються комплексні числа. Оскільки початкове знайомство переважної більшості студентів з цими числами відбувається у стінах вищого навчального закладу і їх розумне вивчення неможливе без серйозного самостійного опрацювання, автори присвятили першу главу книги саме комплексним числам.

Лінійна алгебра, внаслідок абстрактного характеру її основних понять, зберігає за собою репутацію складної науки. У той же час грамотний початковий виклад аналітичної геометрії спирається на відносно нескладний апарат теорії визначників, теорії матриць і операцій над ними, теорії лінійних рівнянь та векторної алгебри. Всі ці розділи максимально доступно і достатньо строго викладені у початкових главах книги в міру їх застосування.

Теорія визначників будується індуктивним методом. Це дає можливість уникнути вивчення теорії перестановок, яка у подальшому ніде не використовується. Системи лінійних рівнянь початково досліджуються без застосування поняття лінійного простору. Основою цих досліджень є метод Гаусса – метод розв’язування систем лінійних рівнянь. Метод Гаусса звільняє теорію систем лінійних рівнянь від логічно випадкових меж теорії визначників і полегшує тим самим техніку роботи студентів на практичних заняттях, значно економлячи час. Крім того, метод Гаусса робить більш простим і прозорим виклад деякої частини матеріалу з теорії визначників та їх застосувань.

Перед тим, як ввести поняття вектора в абстрактному лінійному просторі, досить докладно вивчаються лінійні двовимірні і тривимірні простори. Це має підготовити читача до природного сприйняття абстрактних понять при вивченні лінійної алгебри у подальшому.

Детальне вивчення систем лінійних рівнянь потребує введення і вивчення лінійних просторів. Це поняття знаходить численні застосування в математичних дослідженнях, фізиці, механіці та інших дисциплінах.

Значну увагу в книзі приділено висвітленню питань, які пов’язані з лінійними операторами.

Векторна алгебра систематично використовується при викладенні аналітичної геометрії як на площині, так і в просторі. Наводяться приклади з елементарної геометрії, в яких основні поняття векторного числення створюють своєрідну “геометричну мову”. Геометричні факти на цій “мові” виражаються з тією ж простотою, з якою учень звик записувати факти арифметичного характеру на мові шкільної алгебри. Різноманітні задачі повинні привчити всіх, хто навчається, до алгебраїчного методу розв’язування геометричних задач і разом з тим сформувати необхідні у подальшому навички застосування векторної алгебри.

У більшості діючих підручників з вищої математики канонічну теорію кривих та поверхонь другого порядку викладено досить стисло. Тому автори вважали доцільним подати ці розділи у розширеному вигляді, що дозволило наповнити курс аналітичної геометрії власне геометричним матеріалом.

Мабуть, немає необхідності докладніше зупинятись на побудові книги. Вона є досить ясною зі змісту.

При написанні даного підручника була використана така література:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Москва, «Наука», 1984 г.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. Москва, «Наука», 1968 г.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. Москва, «Наука», 1974 г.

4. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. Москва, 1961 г.

5. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии, Москва, 1960 г.

6. Моденов И.С. Аналитическая геометрия. Москва, 1969 г.

7. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. Москва, 1967 г.

8. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. Москва, 1966 г.

9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва, 1967 г.

Автори висловлюють подяку рецензентам В.В. Кириченку та В.В. Плахотнику за змістовні зауваження, які сприяли поліпшенню підручника.

ВСТУП

§1. Елементи теорії множин

1.1. Поняття множини є одним з найважливіших вихідних понять сучасної математики, які приймають без означення. Смисл цього поняття виражається словами: сукупність, набір, команда тощо. Множини будемо позначати прописними буквами латинського алфавіту, а також за допомогою фігурних дужок, всередині яких перераховуються всі предмети, що складають дану множину. Ці предмети називають елементами множини. Наприклад, запис $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ означає, що M – така ж сама множина, що і множина чисел 1, 2, 3, 4, 5. Цю множину можна записати по-іншому, змінивши порядок розміщення елементів у дужках: $M = \{3, 2, 4, 1, 5\}$, $M = \{2, 5, 1, 4, 3\}$. У позначенні множини за допомогою фігурних дужок відображено її основний зміст і точно вказано, які предмети є, а які не є елементами цієї множини. Так, число 3 – елемент множини M. Пишуть $3 \in M$. Число 7 не є елементом множини M. Пишуть $7 \notin M$. Кожний предмет, який належить до множини, записують у фігурних дужках лише один раз.

Множина M містить 5 елементів. Це позначають так: $n(M) = 5$. Множину, в якій нуль елементів, тобто яка не містить жодного елемента, називають ***порожньою множиною*** і позначають знаком $\varnothing$. Тому $n(\varnothing) = 0$.

Відмітимо, що елементами множини можуть бути самі множини. Тому, наприклад, число елементів множини $\{\varnothing\}$ дорівнює 1, оскільки ця множина містить один елемент і цим елементом є порожня множина.

Множини, які містять скінченне число елементів, називаються ***скінченними***. Множина може і не бути скінченною. Такі множини називаються ***нескінченними.***

Зазвичай, множину описують за допомогою деякої характерної ознаки її елементів, тобто такої ознаки, яку мають всі елементи даної множини і лише вони. При цьому використовують такий запис: $M = \{x \mid p(x)\}$ – множина всіх об'єктів x, що мають ознаку p (або мають властивість p). Наприклад,

$$M = \{x \mid \sin x = 0\} = \{x = \pi k,\ k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \dots\}.$$

<u>**Означення 1**</u>. Множини A і B називають ***рівними***, якщо вони складаються з одних і тих же елементів. У цьому випадку пишуть $A = B$.

Якщо довільний елемент множини A належить також і множині B, то множину A називають **підмножиною** множини B. Це записують так:

$A \subset B$ або $B \supset A$. Говорять, що множина A міститься у множині B або множина B містить множину A.

Якщо у множині A знайдеться хоча б один елемент, який не належить B, то A не є підмножиною множини B: $A \not\subset B$. З означення підмножини випливає, що будь-яка множина є підмножиною самої себе, тобто можна записати $A \subset A$. Приймається також, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

1.2. **<u>Означення 2</u>**. Об'єднанням множин A і B називається множина C, кожний елемент якої належить хоча б до однієї з множин A і B. Позначення: $C = A \bigcup B$ (або $C = A + B$). Отже, $A \bigcup B = \ x \big| x \in A$ або $x \in B$.

<u>Означення 3</u>. Перерізом множин A і B називається множина C, кожний елемент якої належить як до множини A, так і до множини B. Позначення: $C = A \bigcap B$ (або $C = AB$). Отже, $A \bigcap B = \ x \big| x \in A \ i \ x \in B$.

<u>Означення 4</u>. Різницею множин A і B називається множина C, яка містить всі ті елементи множини A, які не належать до множини B. Позначення: $C = A \setminus B$. Отже, $A \setminus B = \ x \big| x \in A \ i \ x \notin B$.

На рис. 1, 2, 3 множини A і B зображено у вигляді кругів. Заштриховані області на цих рисунках є відповідно об'єднанням, перерізом та різницею множин A і B.

$A \bigcup B$

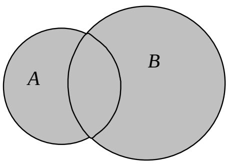


Рис. 1

$A \bigcap B$

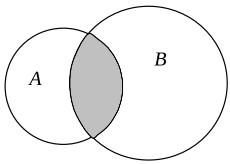


Рис. 2

$A \setminus B$

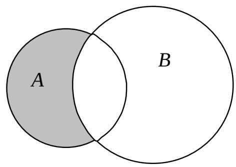


Рис. 3

Можна розглядати об'єднання та переріз трьох і більше множин.

<u>Означення 5</u>. Під об'єднанням та перерізом трьох множин A, B і C розуміють відповідно множини $A \bigcup B \bigcup C = \ A \bigcup B \ \bigcup C$ та $A \bigcap B \bigcap C =$
$= \ A \bigcap B \ \bigcap C$.

Об'єднання та переріз множин A, B, C зображено відповідно на рис. 4 і 5.

$A \bigcup B \bigcup C$ $\qquad$ $A \bigcap B \bigcap C$

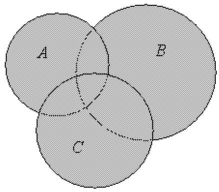


Рис. 4

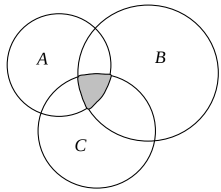


Рис. 5

<u>Означення 6</u>. Кажуть, що між множинами A і B встановлена взаємно-однозначна відповідність, якщо:

1) кожному елементу множини A ставиться у відповідність один і лише один елемент множини B;
2) кожний елемент множини B поставлено у відповідність деякому елементу множини A;
3) різним елементам множини A відповідають різні елементи множини B.

На рис. 6 наведено ілюстрацію взаємно-однозначної відповідності між точками двох відрізків.

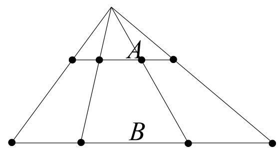


Рис. 6

<u>Означення 7</u>. Множини A та B називаються еквівалентними, якщо між ними можна встановити взаємно-однозначну відповідність.

Якщо скінченні множини A і B еквівалентні, то вони містять однакову кількість елементів і навпаки, будь-які скінченні множини A і B, що містять однакову кількість елементів, еквівалентні.

Розглянемо множину натуральних чисел $N = 1, 2, 3, \ldots$.

<u>Означення 8</u>. Множина A називається зчисленною, якщо вона еквівалентна множині натуральних чисел.

Прикладами зчисленних множин є множини натуральних та цілих чисел, множина раціональних чисел $\frac{m}{n}$. Множина дійсних чисел є нескінченною, але не є зчисленною.

Для зчисленних множин справедлива така властивість: будь-яка нескінченна підмножина зчисленної множини є зчисленною.

Зауваження 1. Іноді під зчисленною множиною розуміють як множину, еквівалентну множині натуральних чисел (її називають зчисленно нескінченною), так і множину, що містить скінченну кількість елементів. Ще кажуть, множина A – зчисленна, якщо її елементи можна занумерувати. При такому розумінні зчисленної множини будь-яка її підмножина є зчисленною.

§2. Числові множини

Для деяких числових множин прийняті стандартні позначення:
N – множина натуральних чисел.
Z – множина цілих чисел.
Q – множина раціональних чисел.
R – множина дійсних чисел (числова пряма).
R^2 – числова площина.

a, b – замкнений проміжок (відрізок) з початком a і кінцем b, причому $a < b$; $a \le x \le b$.

a, b – відкритий проміжок (інтервал) з початком a і кінцем b, причому $a < b$; $a < x < b$.

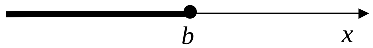
a, b – напіввідкритий проміжок (відкритий зліва) з початком a і кінцем b, причому $a < b$; $a < x \le b$.

a, b – напіввідкритий проміжок (відкритий справа) з початком a і кінцем b, причому $a < b$; $a \le x < b$.

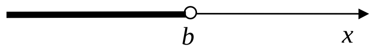
$a, +\infty$ – нескінченний проміжок, промінь числової прямої; a – початок променя (a належить проміжку); $a \le x < \infty$.

$a, +\infty$ – нескінченний проміжок, промінь числової прямої; a – початок променя (a не належить проміжку); $a < x < \infty$.

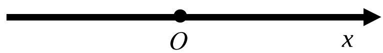
$-\infty, \ b$ – нескінченний проміжок, промінь числової прямої; b – початок променя (b належить проміжку); $-\infty < x \leq b$.



$-\infty, \ b$ – нескінченний проміжок, промінь числової прямої; b – початок променя (b не належить проміжку); $-\infty < x < b$.



$-\infty; +\infty$ – нескінченний проміжок, числова пряма $-\infty < x < \infty$.



§3. Необхідні і достатні умови

Поняття про необхідні і достатні умови відіграють надзвичайно важливу роль у математиці. Неточності в тлумаченні цих понять можуть стати причиною багатьох помилок і непорозумінь.

Теорема – це математичне твердження вигляду “якщо справедливе деяке судження A, то буде справедливим інше судження B”. Наприклад, якщо число n ділиться на 15 (судження A), то це число ділиться на 5 (судження B). Відомо, що в теоремі “якщо A, то B” судження A називають умовою, а B – висновком. Отже, в теоремі чітко формулюються її умова та висновок.

Нехай доведено деяку теорему “якщо A, то B”, тобто встановлено справедливість цього твердження. Тоді кажуть, що судження B випливає з судження A і пишуть $A \to B$. Ще кажуть, що судження B є необхідною умовою судження A, бо якщо судження B хибне, то і судження A також хибне. У свою чергу, при справедливій теоремі “якщо A, то B” судження A називають достатньою умовою судження B.

Тому теорему “якщо число n ділиться на 15, то це число ділиться на 5” можна сформулювати ще так: “для того щоб число n ділилось на 15, необхідно, щоб воно ділилось на 5” (це і зрозуміло, бо числа, які не діляться на 5, не діляться і на 15) або так: “для того щоб число n ділилось на 5, достатньо, щоб воно ділилось на 15” (це також зрозуміло, бо числа, які діляться на 15, обов’язково діляться і на 5).

Якщо доведено, що з A випливає B, то це ще не означає, що і з B випливає A. Іншими словами, твердження “якщо B, то A”, яке називають ***оберненою теоремою***, може бути, а може і не бути справедливим. Для того щоб встановити, справедлива чи ні обернена теорема, потрібно у кожному конкретному випадку її або доводити, або спростовувати.

Відмітимо, що для спростування деякої теореми достатньо навести хоча б один приклад, який їй суперечить. Так, якщо ми хочемо спростувати "якщо B, то A", ми можемо обмежитись конкретним прикладом, в якому при справедливому судженні B судження A є хибним. Повернемося до прикладу. Обернена теорема формулюється так: "якщо число n ділиться на 5, то воно ділиться і на 15". Це твердження хибне, оскільки існують числа, наприклад, число 20, які діляться на 5, але не діляться на 15. Ми навели конкретний приклад і тим самим спростували обернену теорему.

У випадку, коли $A \to B$ і, навпаки, $B \to A$, судження B є необхідною умовою судження A (бо $A \to B$) і, разом з тим – достатньою умовою A (бо $B \to A$). У цьому випадку кажуть, що судження B є необхідною і достатньою умовою судження A. У свою чергу, судження A також є необхідною і достатньою умовою судження B.

Досить часто в тих випадках, коли справедливі взаємно обернені теореми, їх формулюють у вигляді одного твердження: "Для того щоб було справедливим A, необхідно і достатньо, щоб було справедливим B". Часто вживають ще такі формулювання: "A справедливе тоді і тільки тоді, коли справедливе B" або "A справедливе в тому і тільки в тому випадку, коли справедливе B".

Отже, вирази "необхідно і достатньо", "тоді і тільки тоді", "в тому і тільки в тому випадку" мають один і той же смисл.

Потрібно мати на увазі, що доведення теореми, в якій стверджується необхідність і достатність деякої умови, складається з двох частин, оскільки сама ця теорема є об'єднанням двох взаємно обернених теорем. В одній частині доведення доводиться необхідність, а в другій – достатність умови.

Наведемо **приклад**. Для ділення числа $n > 9$ на 4 необхідно і достатньо, щоб на 4 ділилось двозначне число, яке зображається двома останніми цифрами числа n. Потрібно довести дві наступні теореми:

Теорема 1 (необхідність умови). Якщо число $n > 9$ ділиться на 4, то двозначне число, яке зображається двома останніми цифрами числа n, ділиться на 4.

Теорема 2 (достатність умови). Якщо двозначне число, яке зображається двома останніми цифрами числа $n > 9$, ділиться на 4, то число n ділиться на 4.

Нерозуміння того, в яких випадках слід користуватися прямою, а в яких оберненою теоремою, є причиною ряду поширених помилок у математичних умовиводах. Так, учні школи досить часто відповідають, що трикутник зі сторонами 3, 4, 5 (єгипетський трикутник) є прямокутним згідно з теоремою Піфагора: $5^2 = 3^2 + 4^2$. Проте даний умовивід побудовано неправильно. Теорема Піфагора стверджує, що "якщо трикутник ABC прямокутний, то квадрат однієї з його сторін (гіпотенузи) дорівнює сумі квадратів двох інших сторін". В дійсності, учень користується оберненою теоремою: “Якщо в трикутнику ABC квадрат однієї з сторін дорівнює сумі квадратів інших сторін, то трикутник ABC прямокутний”. Лише тому, що ця теорема (обернена до теореми Піфагора) є справедливою, остаточний висновок отримується правильним.

§4. Метод математичної індукції

Існує безліч тверджень, які залежать від натурального числа. Оскільки натуральних чисел нескінченно багато, то насправді кожне таке твердження містить у собі нескінченну кількість тверджень. Наприклад, твердження – сума n перших натуральних чисел дорівнює $\frac{n(n+1)}{2}$ містить у собі такі твердження:

для $n=1$ – перше натуральне число, тобто одиниця, дорівнює $\frac{1(1+1)}{2}$;

для $n=2$ – сума двох перших натуральних чисел, тобто сума одиниці та двійки, дорівнює $\frac{2(2+1)}{2}$; … ;

для $n=1000$ – сума тисячі перших натуральних чисел дорівнює $\frac{1000(1000+1)}{2}$ тощо.

Аналогічно, кожне інше твердження, яке залежить від натурального числа n, є формою запису нескінченної кількості тверджень. Виникає природне питання, як переконатись у справедливості твердження, яке залежить від натурального числа n?

Для доведення таких тверджень застосовується загальний метод, який називається ***методом математичної індукції***. В основі цього методу лежать аксіоми натуральних чисел. Оскільки ці аксіоми вище не наводились, приймемо метод математичної індукції без доведення.

Суть методу математичної індукції при доведенні деякого твердження, що залежить від натурального числа n, полягає в наступному:

1. Перевіряється справедливість твердження, що доводиться, для $n=1$.
2. Робиться припущення про справедливість цього твердження для $n=k\ge 1$.
3. Доводиться справедливість твердження для $n=k+1$ з використанням припущення про його справедливість для $n=k$.

Після цього робиться висновок про справедливість твердження для будь-якого натурального числа n.

Приклад 1. Доведемо сформульоване вище твердження

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

1. Для $n=1$ рівність (1) приймає вигляд $1=\frac{1(1+1)}{2}$ і, отже, виконується.

2. Припустимо, що рівність (1) виконується для $n=k$, тобто

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}\cdot \tag{2}$$

3. Використовуючи рівність (2), доведемо справедливість рівності (1) для $n=k+1$, тобто справедливість рівності

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\,. \tag{3}$$

Дійсно,

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=(1+2+3+\ldots+k)+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\,.$$

Отже, на основі методу математичної індукції робимо висновок, що рівність (1) справедлива для будь-якого натурального числа.

Доведемо за допомогою методу математичної індукції ще ряд тверджень.

Приклад 2. Довести, що для будь-якого натурального числа n справедлива нерівність

$$n\le 2^{n-1}\,. \tag{4}$$

Розв'язання. 1. Для $n=1$ нерівність (4) перетворюється у правильну числову рівність $1=2^{1-1}=2^0$.

2. Припустимо, що рівність (4) справедлива для $n=k$, тобто

$$k\le 2^{k-1}\,. \tag{5}$$

3. Використовуючи нерівність (5), доведемо справедливість нерівності (4) для $n=k+1$, тобто

$$k+1\le 2^{(k+1)-1}\,. \tag{6}$$

Дійсно, $k+1<2k$. Тоді згідно з нерівністю (5) і властивістю транзитивності нерівностей отримуємо $k+1<2\cdot 2^{k-1}$. Праву частину останньої нерівності можна записати у вигляді $2^{(k+1)-1}$. Звідси випливає справедливість нерівності (6).

Отже, на основі методу математичної індукції робимо висновок, що нерівність (4) справедлива для будь-якого натурального числа n.

Приклад 3. Довести, що для будь-якого натурального числа n число $N\;n\;=n^3+5n$ ділиться на 6.

Розв'язання. 1. Для $n=1$ число $N\;1\;=6$ ділиться на 6, тобто твердження справедливе.

2. Припустимо, що дане твердження справедливе для $n=k$, тобто число $N\;k\;=k^3+5k$ ділиться на 6.

3. Використовуючи це, доведемо, що на 6 ділиться і число $N(k+1)=(k+1)^3+5(k+1)$. Маємо

$$N(k+1)=(k+1)^3+5(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+5k+5=$$

$$=(k^3+5k)+6+3k^2+3k=N(k)+6+3k(k+1).$$

Оскільки числа k і $k+1$ – це два послідовних натуральних числа, то одне з них є парним. Тому число $3k(k+1)$ ділиться на 6. Враховуючи, що число $N(k)$ ділиться на 6 і число 6 ділиться на 6, отримуємо, що число $N(k+1)$ також ділиться на 6.

Отже, на основі методу математичної індукції робимо висновок, що число $N(n)=n^3+5n$ ділиться на 6 для будь-якого натурального числа n.

Досить часто метод математичної індукції застосовується для доведення тверджень, справедливих не для всіх натуральних чисел n, а для чисел, більших або рівних деякого натурального числа p. Суть методу математичної індукції в цьому випадку залишається такою ж, але з заміною формулювання пункту 1 на формулювання "Перевіряється справедливість твердження для $n=p$". Доведення твердження для будь-якого натурального $n \geq p$ проводиться за схемою:

1. Перевіряється справедливість твердження для $n=p$.

2. Робиться припущення про справедливість твердження для $n=k$ $(k \geq p)$.

3. Доводиться справедливість твердження для $n=k+1$ з використанням припущення про його справедливість для $n=k$.

Робиться висновок про справедливість твердження для будь-якого натурального $n \geq p$.

Приклад 4. Довести, що для будь-якого натурального числа $n \geq 2$ справедлива нерівність Бернуллі

$$(1+\alpha)^n > 1+\alpha n \quad (\alpha > -1,\ \alpha \neq 0). \tag{7}$$

Розв'язання. 1. Для $n=2$ нерівність (7) має вигляд

$$(1+\alpha)^2 > 1+2\alpha \quad (\alpha > -1,\ \alpha \neq 0). \tag{8}$$

Нерівність (8) рівносильна нерівності

$$\alpha^2 > 0 \quad (\alpha > -1,\ \alpha \neq 0). \tag{9}$$

Нерівність (9) при $\alpha \neq 0$ є справедливою. Тому є справедливою і нерівність (8).

2. Припустимо, що нерівність (7) справедлива для $n=k$ $(k \geq 2)$, тобто

$$(1+\alpha)^k > 1+\alpha k \quad (\alpha > -1,\ \alpha \neq 0). \tag{10}$$

3. Доведемо, використовуючи нерівність (10), справедливість нерівності (7) для $n = k+1$, тобто

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1+\alpha(k+1) \quad (\alpha > -1,\ \alpha \neq 0). \tag{11}$$

Для цього помножимо нерівність (10) на додатне число $\alpha+1$ ($\alpha+1>0$, оскільки $\alpha > -1$). Отримуємо рівносильну нерівність

$$(1+\alpha)^{k+1} > (1+\alpha k)(1+\alpha) \quad (\alpha > -1,\ \alpha \neq 0). \tag{12}$$

Доведемо тепер справедливість нерівності

$$(1+\alpha k)(1+\alpha) > 1+\alpha(k+1). \tag{13}$$

Для цього перенесемо всі члени цієї нерівності в одну сторону, розкриємо дужки і зведемо подібні члени. В результаті отримаємо рівносильну нерівність $\alpha^2 k > 0$, яка є справедливою, оскільки $\alpha \neq 0$, $k \geq 2$. Отже, нерівність (13) справедлива. Враховуючи справедливість нерівностей (12), (13) і властивість транзитивності нерівностей, робимо висновок про справедливість нерівності (11).

Отже, нерівність Бернуллі (7) справедлива для будь-якого натурального $n \geq 2$.

Іноді доведення за допомогою методу математичної індукції називають просто ***доведенням за індукцією***.

Зміст