В.В. Михайленко, Л.Д. Добряков,
Р.М. Головня

Вища математика

Книга 2

Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів

ЖДТУ

2006

УДК 519.21
М 69

В.В. Михайленко, Л.Д. Добряков, Р.М. Головня

Вища математика. Книга 2. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних: Підручник. – Житомир: ЖДТУ, 2006 – 572 с.

ISBN 000-000-000-0

Викладено у доступній і, водночас, достатньо строгій формі основні розділи диференціального числення функцій однієї та кількох змінних.
Для студентів денних і заочних відділень педагогічних та технічних університетів.

Іл.: 254. – Табл.: 4.

Рецензенти: доктор фіз.-мат. наук, професор *В.О. Коваль,*
доктор фіз.-мат. наук, професор *О.М. Станжицький*

УДК 519.21

ISBN 000-000-000-0

ПЕРЕДМОВА

Автори поставили за мету написати серію книг під загальною назвою "Вища математика", які б, з одного боку, враховували специфіку підготовки спеціалістів у сфері технічних наук, з іншого – активізували *самостійну* роботу студентів при вивченні математики. За основу взято курси лекцій, які читались авторами протягом багатьох років на різних факультетах Житомирського державного технологічного університету. Перша книга серії "Лінійна алгебра та аналітична геометрія" вийшла з друку у 2004 році. Дана книга є другою. Зміст і порядок викладу її матеріалу цілком підпорядковані досягненню сформульованої вище мети. Так, основною вимогою при написанні книги була її доступність кожному студенту, який хоче вивчати математику. Для цього ми свідомо відмовились від лаконічного і словесноскупого викладу матеріалу, що призвело до збільшення обсягу книги. Досить часто один і той же математичний текст подається як у словесному формулюванні, так і з використанням логічної символіки. Це, на нашу думку, не лише полегшить засвоєння матеріалу, а й сприятиме виникненню потреби у самостійній роботі над книгою. Разом з тим, ми намагались не лише максимально доступно, а й достатньо строго подавати як принципові ідеї і найважливіші поняття, так і фактичний матеріал, відбираючи найбільш прості і наочні способи доведень багатьох теорем. Для досягнення цієї педагогічної мети ми не наводили всюди неодмінно оригінальні доведення та аргументацію, а вважали найдоцільнішим широко використовувати багату літературу з даного курсу.

Збільшення обсягу книги викликане також значною кількістю прикладів, які ми наводимо з розв'язками.

Мабуть, немає потреби зупинятись на побудові книги. Вона є досить ясною зі змісту. Відмітимо лише деякі особливості книги в цілому.

З множинами всіх натуральних, цілих, раціональних та дійсних чисел і діями над цими числами читач знайомий зі школи. Проте ми вважали за потрібне присвятити цим питанням вступ до книги, ще раз акцентуючи увагу, з одного боку, на необхідності розширення тієї чи іншої числової множини, викликаної її "незамкненістю" відносно арифметичної дії чи, наприклад, геометричними причинами, з іншого боку, на можливості зображення дійсних чисел нескінченними десятковими дробами та зведенні арифметичних дій над цими числами до дій над їх десятковими (раціональними) наближеннями.

Аксіома Архімеда та властивість неперервності дійсних чисел, на яких не акцентується увага в середній школі, наводяться нами пізніше (у главі I), саме тоді, коли виникає необхідність їхнього використання. При цьому властивість неперервності формулюється у формі "принципу вкладених відрізків", який приймається як аксіома.

При побудові книги ми намагалися не наводити тих понять і теорем, які у подальшому викладенні матеріалу книги не використовуємо. Так, усвідомлюючи теоретичну цінність теореми Больцано-Вейєрштрасса, критерію Коші збіжності послідовності (а далі, і функції), понять верхньої та нижньої границь послідовності, ми ці теореми і поняття не розглядаємо.

Поняття границі функції вводиться з використанням поняття границі послідовності, а вже потім дається означення на “мові ε - δ ”.

В основу вивчення функцій багатьох змінних покладено поняття n-вимірного евклідового простору R_n. Питання, пов’язані з границею послідовності точок в R_n, границею функції багатьох змінних, неперервністю та властивостями неперервних функцій, розглядаються зразу ж після вивчення аналогічних питань для функції однієї змінної. Означення і теореми у переважній більшості випадків формулюються і доводяться для функції двох змінних, а вже потім узагальнюються на функції трьох та більшого числа змінних.

У даній книзі не використовується поняття рівномірної неперервності функції на множині. До нього ми звернемось у наступній книзі, викладаючи курс інтегрального числення.

Не вводиться поняття вектор-функції, оскільки це поняття і пов’язані з ним геометричні питання будуть розглядатись у курсі диференціальної геометрії.

У главі, присвяченій дослідженню функцій за допомогою похідних, ми користуємось поняттями як локального (у точці), так і глобального (на проміжку) зростання та спадання функції (враховуючи специфіку подання цього матеріалу у підручнику середньої школи), а також локальної та глобальної угнутості (опуклості) графіка функції.

Питання про достатні умови екстремуму функції двох змінних досліджується таким чином, щоб результати можна було безпосередньо поширити на випадок функції довільного числа змінних.

Поняттю умовного екстремуму передує детальне вивчення неявних функцій.

Працюючи над даною книгою, читач буде змушений звертатись до книги 1 “Лінійна алгебра та аналітична геометрія”. Так, наприклад, перед вивченням функцій багатьох змінних потрібно ознайомитись з поняттям n-вимірного евклідового простору; матеріал, присвячений екстремумам функцій багатьох змінних, потребує знання квадратичних форм.

У свою чергу, матеріал даної книги допоможе читачеві краще опанувати книгу 1, зокрема, перед вивченням самоспряжених операторів і квадратичних форм слід ознайомитись з основними властивостями неперервних функцій на замкнених обмежених множинах в R_n. Взагалі, поняття границі та навики диференціального числення допомагають глибше зрозуміти матеріал як лінійної алгебри, так і аналітичної геометрії (дотичні до кривих другого порядку, асимптоти гіперболи тощо).

Виходячи зі сказаного, автори рекомендують книгу 1 “Лінійна алгебра та аналітична геометрія” і дану книгу вивчати паралельно.

При написанні даної книги використовувалась така література:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. Москва, «Наука», 1984 г.

2. Виленкин Н.Я., Шварцбурд С.Н. Математический анализ. Москва, «Просвещение», 1969 г.

3. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Справочное пособие. Киев, «Вища школа», 1985 г.

4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1,2. Москва, «Высшая школа», 1973 г.

5. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г. и др. Справочное пособие по математическому анализу. Киев, «Вища школа», 1978 г.

6. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Колайда А.Ф. Математический анализ. Ч. 1. Киев, «Вища школа», 1983 г.

7. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1. Москва, «Наука», 1975 г.

8. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Ч. 1. Київ, «Техніка», 2000 р.

9. Очан Ю.С., Шнейдер В.Е. Математический анализ. Москва, 1961 г.

10. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Т. 1. Москва, «Наука», 1974 г.

11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Москва, «Физматгиз», 1962 г.

Автори висловлюють щиру подяку рецензентам д.ф.-м.н. професору В.О. Ковалю та д. ф.-м. н професору О. М. Станжицькому за змістовні зауваження, які сприяли поліпшенню книги.

Вступ

§ 1. Натуральні та цілі числа

У шкільному курсі математики вивчались наступні числові множини:
$N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – множина натуральних чисел;

$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – множина цілих чисел;

Q – множина раціональних чисел (чисел виду $\dfrac{p}{q}$, де $p \in Z$, $q \in N$);

R – множина дійсних чисел.

На основі теорії множин будується теорія натуральних чисел, потім теорія цілих чисел, теорії раціональних та дійсних чисел, а потім теорія комплексних чисел. Причому кожну з цих теорій можна будувати як конструктивно, так і аксіоматично. При конструктивній побудові теорії нова числова система визначається через попередню, яка вважається вихідною. Поняття натурального числа вводиться через поняття множини, цілі числа визначаються через натуральні, раціональні – через цілі, дійсні – через раціональні.

Ми не ставимо за мету строге введення всіх цих множин, оскільки це виходить за межі даного курсу. Разом з тим, спробуємо охарактеризувати множини N, Z, Q, R не ізольовано одну від одної, а виявляючи їх загальні властивості. Коротко опишемо ці множини.

1.1. Поняття натурального числа – одне з основних понять математики. Це поняття не означується.

Кожне натуральне число характеризує кількість елементів деякої скінченної множини. Довільні скінченні множини, які мають однакову кількість елементів, характеризуються одним і тим же натуральним числом. Всім множинам, що складаються лише з одного елемента, можна поставити у відповідність натуральне число, яке прийнято називати числом "одиниця". Всім множинам, що містять лише два елементи, можна поставити у відповідність наступне натуральне число, яке прийнято називати числом "два". Продовжуючи таку відповідність, можна отримати будь-яке з натуральних чисел.

Для натуральних чисел справедливі наступні властивості:

1) таких чисел нескінченно багато;

2) всі натуральні числа розміщуються у порядку одне за одним, починаючи з одиниці.

Множина всіх натуральних чисел утворює ряд натуральних чисел

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}. \tag{1}$$

Кожне натуральне число n має своє місце у цьому ряді і для кожного такого числа існує одне і тільки одне наступне за ним число $n+1$. Подібні множини ще називають дискретними множинами.

Множина натуральних чисел N є впорядкованою, а саме, для довільних двох натуральних чисел n і m можливий один і тільки один з трьох випадків:

1) $n = m$; 2) $n > m$; 3) $m > n$.

Маючи ряд натуральних чисел (1), можна визначити, яке з двох чисел більше: натуральне число n більше за натуральне число m, якщо у ряді (1) воно розміщується праворуч від m, і менше за m, якщо – ліворуч. Якщо натуральні числа n і m займають у ряді (1) одне й те ж місце, то вони рівні, тобто $n = m$.

Введемо операцію додавання двох натуральних чисел, скориставшись операцією об'єднання множин. Нехай множини A та B не перетинаються, причому множині A відповідає натуральне число n, а множині B – натуральне число m. Тоді множині $C = A \bigcup B$ відповідає деяке натуральне число p. Це число називається *сумою* чисел n і m і позначається $p = n + m$. Числа n і m називаються доданками.

Скориставшись рядом (1), операції додавання двох натуральних чисел n і m можна надати наступне тлумачення: додати два натуральних числа n і m – означає знайти натуральне число p $(p > n)$, яке знаходиться на m-му місці у ряді (1) від числа n.

Операція додавання натуральних чисел поширюється на більш як два доданки за правилом $m + n + k = (m + n) + k$.

Помножити натуральне число n на натуральне число m – означає знайти натуральне число q, яке дорівнює:

1) n, якщо $m = 1$;

2) сумі m чисел, кожне з яких рівне n, тобто сумі $\underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ разів}}$, якщо $m > 1$.

Число q називається *добутком* чисел n та m і позначається $q = n \cdot m$. Числа n і m називаються співмножниками. На більше число співмножників операція множення поширюється за правилом $m \cdot n \cdot k = (m \cdot n) \cdot k$.

Сума та добуток натуральних чисел завжди є числом натуральним. Ще кажуть, що "операції додавання та множення натуральних чисел завжди виконуються" або "множина натуральних чисел замкнена відносно додавання та множення".

Операції додавання та множення натуральних чисел мають ряд властивостей, які носять назву:

1) комутативного (переставного) закону

— при додаванні $n + m = m + n$,

— при множенні $n \cdot m = m \cdot n$;

2) асоціативного (сполучного) закону

— при додаванні $(n+m)+k = n+(m+k)$,

— при множенні $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$;

3) дистрибутивного (розподільного) закону

— при множенні суми $(n+m)k = nk + mk$;

відмітимо також особливу властивість одиниці

4) $n \cdot 1 = n$.

Різницею двох натуральних чисел m і n називається таке число k, яке в сумі з від'ємником n дає зменшене m. Знаходження різниці k називається операцією віднімання чисел m та n і позначається $m-n$. Отже, за означенням

$$m-n=k, \quad \text{якщо} \quad k+n=m.$$

Операція віднімання на множині N виконується не завжди. Наприклад, різниця чисел 3 і 5 не визначена на множині N, оскільки не існує натурального числа k, яке задовольняє рівності $k+5=3$. У цьому випадку ще кажуть, що множина натуральних чисел N не є замкненою відносно операції віднімання.

Часткою двох натуральних чисел m і n називається таке число k, яке в добутку з дільником n дає ділене m. Знаходження частки k називається операцією ділення і позначається як $m:n$ або $\frac{m}{n}$. Отже,

$$m:n=k, \quad \text{якщо} \quad k \cdot n = m.$$

Зрозуміло, що множина натуральних чисел не є замкненою відносно операції ділення.

Зауваження 1. Якщо натуральне число m не ділиться націло на натуральне число n, тобто не існує такого натурального числа k, що $k \cdot n = m$, то розглядають ділення з остачею. Якщо m – ділене, n – дільник, p – неповна частка і r – остача, то

$$m = n \cdot p + r, \quad r < n. \tag{2}$$

Тут m, n, p, r – натуральні числа. Якщо m ділиться націло на n, тобто без остачі, то $r=0$.

Приклад 1. Знайти неповну частку і остачу від ділення числа 377 на число 25.

Розв'язання. Виконаємо "ділення кутом"

$$\begin{array}{r|l} -\,377 & 25 \\ \underline{25} & 15 \\ -\,127 & \\ \underline{125} & \\ 2 & \end{array}$$

У частці отримуємо 15, а в остачі 2. Згідно з рівністю (2) маємо $377 = 25 \cdot 15 + 2$.

1.2. Отже, множина натуральних чисел N замкнена відносно додавання та множення, тобто сума та добуток двох натуральних чисел n і m знову є натуральними числами відповідно $n+m$ та $n \cdot m$, і не є замкненою відносно віднімання: якщо $n \le m$, то різниця $n-m$ вже не буде натуральним числом. Тому виникає потреба у побудові деякої нової множини чисел Z і визначення в ній операцій додавання та множення таким чином, щоб задовольнялись наступні вимоги:

а) множина натуральних чисел N повинна міститися у цій новій множині чисел Z: $N \subset Z$;

б) застосування визначених у Z операцій додавання та множення до чисел з N повинно давати ті ж результати, що й раніше;

в) операція віднімання повинна бути визначеною для всіх пар чисел з Z.

Як відомо, такою множиною є множина цілих чисел. Ця множина складається з натуральних чисел N, нуля та множини чисел $\overline{N}$, протилежних натуральним:

$$\overline{N} = \{-1, -2, \ldots\}.$$

Множину всіх цілих чисел Z можна зобразити рядом цілих чисел

$$\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \qquad (3)$$

або записати у вигляді

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}. \qquad (4)$$

Для додавання та множення цілих чисел виконуються ті ж властивості, що й для аналогічних дій над натуральними числами.

Нагадаємо, що нуль має деякі особливі властивості

$$p + 0 = p, \quad p \cdot 0 = 0 \quad \text{для всіх} \quad p \in Z,$$

операцію віднімання можна звести до додавання з числом, протилежним від'ємнику

$$p - q = p + (-q), \quad p - (-q) = p + q,$$

а для множення цілих чисел вводиться відоме правило знаків: якщо p, q – додатні цілі числа, то

$$(-p) \cdot q = p \cdot (-q) = -pq, \quad (-p) \cdot (-q) = pq, \quad -p = (-1) \cdot p,$$

тобто добуток двох цілих чисел різних знаків є від'ємним числом; добуток двох цілих чисел одного знака є додатним числом; число, протилежне даному, дорівнює добутку даного числа на мінус одиницю.

Отже, множина Z цілих чисел нескінченна, не має ані початкового, ані кінцевого елемента. Ця множина є впорядкованою (за допомогою відношення "більше"), дискретною, замкненою відносно додавання, множення та віднімання, проте не є замкненою відносно ділення.

§ 2. Раціональні числа

Ділення на множині Z виконується не завжди. Так, наприклад, не існує цілого числа k, для якого справджується рівність $7 = 9k$. Виникає потреба у розширенні множини Z до такої множини чисел Q, яка б разом із введеними операціями додавання та множення задовольняла наступні вимоги:

а) $Z \subset Q$;

б) при застосуванні визначених у Q операцій додавання, віднімання та множення до чисел із Z повинні отримуватись ті ж результати, що й раніше;

в) операція ділення повинна бути визначеною для всіх пар чисел з Q, за винятком ділення на 0.

Таким розширенням є множина Q раціональних чисел, які визначаються через пари цілих чисел p і q у вигляді дробу $\frac{p}{q}$, де p – чисельник, а $q \neq 0$ – знаменник. Цілому числу p відповідає дріб вигляду $\frac{p}{1}$.

Введемо:

1) означення рівності раціональних чисел

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps = qr;$$

2) означення суми раціональних чисел

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs};$$

3) означення добутку раціональних чисел

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}.$$

Додавання та множення раціональних чисел підпорядковані тим же законам, що й відповідні дії над цілими числами. Перевіримо, наприклад, комутативний закон для додавання:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}.$$

Кожне раціональне число можна записати різними способами:

$$\frac{p}{q} = \frac{2p}{2q} = \frac{3p}{3q} = \dots,$$

разом з тим, для кожного раціонального числа $a \neq 0$ є один і тільки один запис вигляду $a = \frac{p}{q}$, де p і q – взаємно прості числа (тобто числа, які не мають спільних дільників, відмінних від одиниці) і $q > 0$. Наприклад, $\frac{6}{-9} = \frac{-2}{3}$. Такий запис називається записом числа a у вигляді *нескоротного дробу*. Число $\frac{-p}{q}$ називається протилежним до числа $\frac{p}{q}$ і записується у вигляді $\frac{-p}{q} = -\frac{p}{q}$.

Часткою від ділення числа $a \in Q$ на число $b \in Q$ називається таке число $c \in Q$, для якого виконується рівність $a = b \cdot c$. Якщо

$$a = \frac{p}{q}, \quad b = \frac{r}{s} \quad (r \neq 0), \quad \text{то} \quad c = \frac{ps}{qr}.$$

Число c визначається однозначно. Ділення на 0 неможливе, оскільки рівність $a = 0 \cdot x$ при $a \neq 0$ не виконується для жодного $x \in Q$, а при $a = 0$ їй задовольняє будь-яке $x \in Q$. Тому, як у випадку $a \neq 0$, так й у випадку $a = 0$ порушується основна вимога, що висувається до арифметичних операцій: результат їх застосування повинен бути визначеним, причому однозначно.

Раціональне число $a = \frac{p}{q}$ називається додатним, якщо числа p і q мають однакові знаки, і від’ємним – якщо їх знаки різні.

Для раціональних чисел справедливі наступні властивості:

1) кожне раціональне число або дорівнює нулю, або додатне, або від’ємне;

2) якщо $a = \frac{p}{q}$ – додатне, то $-a = -\frac{p}{q}$ – від’ємне;

3) сума додатних чисел – додатна, а сума від’ємних чисел – від’ємна;

4) добуток двох чисел одного знака – додатний, а добуток двох чисел різних знаків – від’ємний;

5) якщо число a – додатне, то число $\frac{1}{a}$ також додатне. Якщо a – від’ємне число, то від’ємним є й число $\frac{1}{a}$.

Нехай a і b – різні раціональні числа. Якщо $(a - b)$ – додатне число, то кажуть, що a більше b і пишуть $a > b$. Якщо ж $(a - b)$ – від’ємне число, то кажуть, що a менше b і пишуть $a < b$.

Отже, множина раціональних чисел Q є впорядкованою: для довільних раціональних чисел a і b можливий один і тільки один з трьох випадків:

1) $a = b$; 2) $a > b$; 3) $a < b$.

Між двома довільними раціональними числами знайдеться хоча б одне раціональне число. Дійсно, нехай a і b – раціональні числа, причому $a < b$. Тоді $a_1 = \frac{a + b}{2}$ – також раціональне число, причому $a < \frac{a + b}{2} < b$. Звідси випливає, що між двома різними раціональними числами a і b лежить нескінченна кількість раціональних чисел. Спочатку ми знаходимо таке число a_1, потім число a_2, що лежить між a і a_1, потім число a_3 між a і a_2 і т.д. Множина раціональних чисел вже не є дискретною, оскільки для довільного елемента не можна вказати наступного за ним. Такі множини називаються *щільними*.

§ 3. Десяткові дроби. Зображення раціональних чисел десятковими дробами

Серед звичайних дробів $\frac{p}{q}$ розглянемо дроби, в яких знаменники – деякі степені числа 10. Такими є, наприклад, дроби

$$\frac{21}{10};\ \frac{3}{100};\ \frac{11137}{1000};\ \frac{258}{100000}.$$

Для розглядуваних дробів використовується спеціальна форма запису, а саме, записують чисельник дробу і відраховують з правого боку стільки цифр, скільки нулів у знаменнику. Потім відділяють ці цифри комою. Якщо у чисельнику менше цифр, ніж нулів у знаменнику, то записують чисельник і перед його цифрами дописують стільки нулів, скільки не вистачає цифр у чисельнику, потім ставлять кому і перед нею ще один нуль. Наприклад, наведені вище дроби записуються у вигляді:

$$2{,}1;\quad 0{,}03;\quad 11{,}137;\quad 0{,}00258.$$

Такі записи носять назву *скінченних десяткових дробів*.

При додаванні скінченних десяткових дробів користуються правилами додавання натуральних чисел, наприклад, додаванням у стовпчик. Для цього записують обидва дроби так, щоб у них була однакова кількість цифр після коми, а саме, у тому дробі, в якому таких цифр менше, дописують справа нулі. У числі, що отримується після додавання, відраховують справа і відокремлюють комою стільки цифр, скільки їх було справа від коми у кожного з доданків.

Помножити скінченні десяткові дроби можна теж за правилами множення натуральних чисел, тільки у числі, що отримується при множенні, потрібно відрахувати справа і відокремити комою стільки цифр, скільки їх було після коми в обох множниках разом.

Довільний скінченний десятковий дріб легко переводиться у звичайний. Для цього потрібно записати у чисельнику ціле число, яке отримується відкиданням коми десяткового дробу, а в знаменнику – число 10 у степені, що дорівнює кількості цифр десяткового дробу після коми. Звичайно, отриманий дріб можна скоротити на спільний множник, якщо такий є. Наприклад, $6{,}25=\frac{625}{100}=\frac{25}{4}$.

Отже, якщо знаменник q звичайного дробу $\frac{p}{q}$ є деяким степенем числа 10, то цей дріб розкладається у скінченний десятковий дріб. Справедливе обернене твердження: скінченний десятковий дріб зображає собою десятковий розклад звичайного дробу, знаменник якого є деяким степенем числа 10.

Відмітимо, що натуральне число можна вважати частинним випадком скінченного десяткового дробу, наприклад, можна записати

$$17=17{,}0;\quad 17=17{,}00;\quad 17=17{,}000;\ldots.$$

Записати звичайний дріб у вигляді скінченного десяткового дробу – означає знайти скінченний десятковий дріб, що дорівнює даному (якщо, звичайно, такий існує). Виникає питання: які із звичайних дробів можна записати у вигляді скінченного десяткового дробу? Очевидно, що звичайний дріб $\frac{p}{1}=\frac{p}{10^0}$, тобто ціле число p є частинним випадком скінченного десяткового дробу. У загальному випадку відповідь на поставлене питання дає наступна теорема.

Теорема 1. Для того щоб нескоротний дріб $\frac{p}{q}$, де $q \neq 1$, записувався у вигляді скінченного десяткового дробу, необхідно і достатньо, щоб його знаменник не мав простих множників, відмінних від 2 та 5.

Доведення. *Необхідність*. Нехай дріб $\frac{p}{q}$ записується у вигляді скінченного десяткового дробу, тобто справедлива рівність

$$\frac{p}{q} = \frac{s}{10^k},$$

де s – ціле, а k – натуральне число. Покажемо, що знаменник $q \neq 1$ цього дробу не містить простих множників, відмінних від 2 і 5. Дійсно, оскільки дріб $\frac{p}{q}$ – нескоротний, то

$$s = pm, \quad 10^k = qm.$$

Простими множниками числа 10^k є лише 2 і 5. Тому і число qm не має інших простих множників, крім 2 і 5. Це випливає з єдиності розкладу числа на прості множники.

Отже, число q не має простих множників, відмінних від 2 та 5.

Достатність. Нехай тепер знаменник дробу $\frac{p}{q}$ не має простих множників, які відмінні від 2 та 5, тобто

$$q = 2^m \cdot 5^n.$$

Покажемо, що в цьому випадку дріб $\frac{p}{q}$ можна записати у вигляді скінченного десяткового дробу. Дійсно, за основною властивістю дробу звичайний дріб $\frac{p}{q}$ не зміниться, якщо його чисельник та знаменник помножити на одне і те ж число. Помножимо чисельник та знаменник дробу $\frac{p}{q}$ на $2^n \cdot 5^m$:

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^m \cdot 5^n} = \frac{2^n \cdot 5^m \cdot p}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^n \cdot 5^m} = \frac{2^n \cdot 5^m \cdot p}{2^{m+n} \cdot 5^{m+n}} = \frac{2^n \cdot 5^m \cdot p}{10^{n+m}}.$$

Добуток $2^n \cdot 5^m \cdot p$ є цілим числом. Позначимо його через s. Тоді

$$\frac{p}{q} = \frac{s}{10^{m+n}}.$$

Звідси видно, що звичайний дріб $\frac{p}{q}$ записується у вигляді скінченного десяткового дробу.

Теорему доведено.

Нескінченним десятковим дробом називається десятковий дріб, в якому для довільного натурального числа n на n-му місці після коми стоїть одна з цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Нескінченний десятковий дріб називається *періодичним*, якщо одна з цифр або впорядкований набір кількох цифр, починаючи з деякого місця після коми, повторюється. Така цифра або впорядкований набір кількох цифр називається *періодом* нескінченного дробу. Замість того, щоб писати період декілька разів, його для зручності записують один раз і беруть у дужки:

$$0,454545\ldots = 0,(45); \quad 3,5714281428\ldots = 3,57(1428).$$

Якщо у періодичному десятковому дробі період починається відразу ж після коми, то такий дріб називається чистим періодичним дробом, у противному разі дріб називається мішаним періодичним дробом. Наприклад, $1,(35)$ – чистий періодичний дріб; $5,1725(637)$ – мішаний періодичний дріб.

З теореми 1 випливає, що у випадку, коли знаменник нескоротного дробу $\frac{p}{q}$ має хоча б один простий дільник, відмінний від 2 або 5, процес ділення p на q ніколи не закінчиться (жодна з чергових остач в нуль не перетвориться).

Для того щоб з'ясувати причину появи періодичності дробу, розглянемо процес ділення на 7.

Приклад 1.

$$
\begin{array}{l|l}
2 & 7 \\
\hline
-20 & 0,2857142 \\
\;\;14 & \\
\hline
\;\;-60 & \\
\;\;\;\;56 & \\
\hline
\;\;\;\;-40 & \\
\;\;\;\;\;\;35 & \\
\hline
\;\;\;\;\;\;-50 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;49 & \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;-10 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;7 & \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-30 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;28 & \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-20 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;14 & \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;6 &
\end{array}
$$

Отже, $\frac{2}{7} = 0,285714285714\ldots = 0,\ 285714$ і скільки ділення не продовжувати, група цифр 285714 у частці буде періодично повторюватись.

Якщо ділення націло не виконується, то з'являється остача, яка приймає одне з таких значень: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. На кожному наступному кроці остача також приймає одне з цих шести значень. Тому не пізніше, ніж на сьомому кроці ми знову зустрінемось з одним із значень остачі, яке вже з'являлося раніше. Починаючи з цього місця, процес ділення набуває періодичного характеру. Періодично будуть повторюватись і значення остачі, і цифри частки. У розглянутому прикладі процес ділення повторюється на сьомому кроці.

Наведені вище міркування залишаються справедливими й у випадку довільного дільника.

Відмітимо, що скінченні десяткові дроби можна розглядати як частинний випадок нескінченних періодичних дробів. Наприклад, замість $15,48$ можна записати $15,48000\ldots = 15,48\ 0$, а замість 17 – $17,000\ldots = 17,\ 0$.

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 2. Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Справедливе й обернене твердження.

Теорема 3. Для кожного нескінченного періодичного дробу існує раціональне число, яке йому дорівнює.

Наведемо приклади знаходження таких чисел.

Приклад 2. Записати періодичний дріб $0,\ 17$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. Позначимо шуканий дріб через x:

$$x = 0,\ 17 = 0,171717\ldots.$$

Помножимо наш чистий періодичний дріб на таке число, щоб кома перемістилась вправо рівно на період. Оскільки цифр у періоді дві, потрібно помножити число x на 100. Тоді

$$100x = 0{,}171717\ldots \cdot 100 = 17{,}1717\ldots = 17,\ 17\ \ .$$

Далі від $100x$ віднімаємо x і отримуємо

$$100x - x = 17,\ 17\ \ - 0,\ 17\ \ \Leftrightarrow 99x = 17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{99}.$$

Відповідь: $0,\ 17\ \ = \dfrac{17}{99}$.

Приклад 3. Перетворити у звичайний дріб число $3{,}1\ 7\ \ $.

Розв'язання. Покладемо $x = 3{,}1\ 7\ \ $. Перемістимо у цьому мішаному періодичному дробі кому вправо так, щоб отримати чистий періодичний дріб. Для цього x потрібно помножити на 10. Тоді

$$10x = 31,\ 7\ \ .$$

Покладемо $y = 31,\ 7\ \ $ і переведемо цей чистий періодичний дріб у звичайний дріб, як це було зроблено у прикладі 2. Маємо

$$y = 31,\ 7$$
$$10y = 317,\ 7$$

$$10y - y = 317,\ 7\ \ - 31,\ 7\ \ \Leftrightarrow 9y = 286 \Leftrightarrow y = \frac{286}{9}.$$

Тому

$$10x = \frac{286}{9} \Leftrightarrow x = \frac{286}{90} = \frac{143}{45} = 3\frac{8}{45}.$$

Відповідь: $3{,}1\ 7\ \ = 3\dfrac{8}{45}$.

Приклад 4. Перетворити у звичайний дріб число $3{,}254\ 9\ \ $.

Розв'язання. Покладемо $x = 3{,}254\ 9\ \ $. Тоді

$$1000x = 3254,\ 9\ \ .$$

Введемо позначення $y = 1000x$. Як і раніше, отримуємо

$$y = 3254,\ 9$$
$$10y = 32549,\ 9$$

$$10y - y = 32549,\ 9\ \ - 3254,\ 9\ \ \Leftrightarrow 9y = 29295 \Leftrightarrow y = 3255 \Leftrightarrow 1000x = 3255 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3255}{1000} = 3\frac{51}{200}.$$

Відповідь: $3{,}254\ 9\ \ = 3\dfrac{51}{200}$.

Відмітимо, що у прикладі 4 число $\dfrac{3255}{1000} = 3{,}255 = 3{,}255\ 0\ \ $ є скінченним десятковим дробом або нескінченним десятковим дробом з нулем у періоді. Тому $3,254\ \ 9\ \ = 3,255\ \ 0\ \ $.

Будь-який інший десятковий дріб з дев'яткою у періоді також можна подати у вигляді дробу з нулем у періоді. Для цього слід збільшити десятковий знак перед періодом на одиницю. Наприклад, $0,36\ \ 9\ \ = 0,37\ \ 0\ \ $; $49,\ \ 9\ \ = 50,\ \ 0\ \ $ тощо. Для того щоб не було двох різних зображень одного й того ж скінченного десяткового дробу, число 9 у періоді, зазвичай, не використовується. Тоді кожен скінченний десятковий дріб єдиним способом записується у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу з періодом 0.

Правила перетворення звичайного дробу в нескінченний періодичний десятковий дріб і навпаки наведені вище на прикладі додатних раціональних чисел. У випадку від'ємного числа можна діяти так: взяти додатне число, протилежне даному від'ємному числу, перетворити його у нескінченний періодичний десятковий дріб, а потім перед цим дробом поставити знак мінус. Наприклад, для $-\frac{5}{3}$ маємо

$$\frac{5}{3} = 1,\ \ 6\ \ ; \qquad -\frac{5}{3} = -1,\ \ 6\ \ = -1,666\ldots.$$

Аналогічно діємо при перетворенні від'ємного нескінченного періодичного десяткового дробу у звичайний дріб.

Отже, між множиною раціональних чисел та множиною нескінченних періодичних десяткових дробів існує взаємно однозначна відповідність.

§ 4. Ірраціональні числа. Дійсні числа

4.1. Операція добування кореня з натурального числа на множині раціональних чисел виконується не завжди. Доведемо, наприклад, що $\sqrt{2}$ не є раціональним числом .

Теорема 1. Не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює двом, тобто квадратне рівняння

$$x^2 = 2$$

на множині раціональних чисел не має розв'язку.

Доведення. Проведемо доведення від супротивного. Нехай існує таке додатне раціональне число r, яке записується у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$ і для якого

$$r^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 .$$

Звідси $m^2 = 2n^2$ і тому число m^2 є парним. Але тоді буде парним і число m. У противному разі $m = 2k+1$, $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ і m^2 – непарне число.

Оскільки m – парне число, то $m = 2k$, $m^2 = 4k^2$ і тому $n^2 = 2k^2$. Це означає, що й n – парне число. Отже, числа m і n є парними, що суперечить припущенню про нескоротність дробу $\frac{m}{n}$. Отримане протиріччя й доводить теорему 1.

Справедливе більш загальне твердження.

<u>Теорема 2</u>. Якщо натуральне число не є квадратом іншого натурального числа, то воно не може бути і квадратом раціонального числа.

Тому не існує раціональних чисел $\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7},\ \sqrt{10},\ \ldots$.

Однією з основних геометричних причин, що призвели до розширення множини раціональних чисел, була задача про вимірювання довжини відрізка. Виявляється, що раціональних чисел не досить для розв'язання цієї важливої геометричної задачі.

Нагадаємо, як вимірюється довжина відрізка. Нехай потрібно виміряти деякий відрізок AB за допомогою відрізка OE, довжина якого приймається за одиничну. Для цього на відрізку AB від точки A відкладають відрізок OE таку кількість разів, щоб одержаний відрізок A_1B був менший 1 (рис. 1).

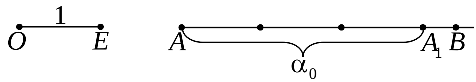

Рис. 1

Нехай α_0 – число таких відкладань. Тоді ціле число α_0 є результатом вимірювання довжини відрізка AB з точністю до 1.

Для того щоб виміряти відрізок AB з більшою точністю, беремо відрізок MN, який дорівнює $\frac{1}{10}$ одиниці вимірювання, і відкладаємо його на відрізку A_1B від точки A_1 до тих пір, поки не отримаємо залишок A_2B, менший $\frac{1}{10}$ (рис. 2).

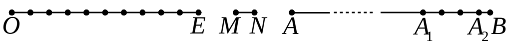

Рис. 2

Нехай α_1 – число таких відкладань, $0 \le \alpha_1 \le 9$. Тоді десятковий дріб α_0, α_1 є результатом вимірювання відрізка AB з точністю до $\frac{1}{10}$.

Цей процес можна продовжити. У результаті будемо одержувати числа

$$\alpha_0;\quad \alpha_0,\alpha_1;\quad \alpha_0,\alpha_1\alpha_2;\quad \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3;\ \ldots,$$

які характеризують результати вимірювань з точністю до 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, ... і т.д.

Можливі два випадки:

1°. При відкладанні на відрізку A_nB чергової частки одиничного відрізка, що дорівнює $\frac{1}{10^n}$, вперше не утвориться остача. Тоді десятковий дріб $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ уже не наближено, а точно виражатиме довжину відрізка AB.

2°. Жодна з остач A_1B, A_2B, $A_3B, \ldots$ не дорівнює нулю. У цьому випадку довжина відрізка AB виражається нескінченним дробом $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$.

Наприклад, якщо відрізок AB дорівнює чверті одиниці вимірювання OE, то його довжина виражається скінченним десятковим дробом $0,25$; а якщо третині одиниці вимірювання OE – нескінченним періодичним десятковим дробом $0,333\ldots$. Разом з тим, існують і такі відрізки, довжини яких не виражаються скінченним або нескінченним періодичним десятковим дробом.

Нехай, наприклад, AB – гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють одиниці вимірювання OE. За теоремою Піфагора довжина відрізка AB дорівнює $\sqrt{2}$ і тому не виражається раціональним числом. Це означає, що при вимірюванні відрізка AB ми отримаємо десятковий дріб, який не буде ані скінченним, ані нескінченним періодичним. Отже, для вимірювання довжин відрізків раціональних чисел не вистачає. Це стало однією з причин введення ірраціональних чисел. Ще одним добре відомим прикладом ірраціонального числа є число π, яке дорівнює відношенню довжини кола до його діаметра. Зауважимо, що ірраціональність числа π доводиться непросто.

Поряд з нескінченними періодичними існують нескінченні неперіодичні десяткові дроби.

Розглянемо два приклади.

Приклад 1. Довести, що дріб $0{,}12345678910\ldots$, у якому після коми записано підряд усі натуральні числа, є неперіодичним десятковим дробом.

Розв'язання. Припустимо, що це не так і даний дріб є періодичним. Нехай період цього дробу містить k знаків, тобто з деякого місця після коми весь час повторюватиметься одна і та ж послідовність з k цифр. Але оскільки серед натуральних чисел є числа 10^k, 10^{k+1}, $10^{k+2},\ldots$, десь далі обов'язково з'являться підряд k нулів. З періодичності дробу випливає, що його період складається з одних нулів, а це означає скінченність дробу. Отримали протиріччя зі способом утворення нашого дробу, що й доводить вихідне твердження.

Приклад 2. Довести, що число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ не є раціональним.

Розв'язання. Припустимо, що це не так і число

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r$$

є раціональним. Очевидно, що число r не дорівнює нулю. Можна записати

$$\sqrt{3}=r-\sqrt{2}\ .$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрата

$$3=r^2-2r\sqrt{2}+2 \Leftrightarrow \sqrt{2}=\frac{r^2-1}{2r}\ .$$

У правій частині останньої рівності маємо раціональне число, а тому і $\sqrt{2}$ – раціональне число. Одержане протиріччя й доводить вихідне твердження.

Розглянемо нескінченний дріб

$$a=\alpha_0,\, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots, \qquad (1)$$

де α_0 – натуральне число або нуль, а $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots$ – цілі числа від 0 до 9.

Для зручності число (1) позначено буквою a. Число зліва від коми у нескінченному десятковому дробі називають цілою частиною цього дробу, першу цифру після коми – цифрою першого розряду, другу цифру після коми – цифрою другого розряду, третю – цифрою третього розряду і т. д.

Якщо нескінченний десятковий дріб (1) неперіодичний, то він називається *ірраціональним* числом.

Як і для раціональних чисел, кожному додатному ірраціональному числу a ставиться у відповідність від'ємне ірраціональне число, яке позначається символом $-a$ і зображається таким же дробом, але зі знаком мінус: $-\alpha_0,\, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$. Множину всіх додатних та від'ємних ірраціональних чисел називають множиною ірраціональних чисел. Множину всіх ірраціональних та раціональних чисел називають множиною *дійсних* чисел R .

Отже, довільне дійсне число зображається додатним або від'ємним нескінченним десятковим дробом або дробом $0,000\ldots$. Раціональним числам відповідають нескінченні періодичні десяткові дроби. Скінченні десяткові дроби розглядають як періодичні з періодом 0, але немає періодичних дробів з періодом 9 .

Додатні дійсні числа і нуль називаються невід'ємними дійсними числами.

Поки що дійсні числа визначені нами формально. Для того щоб дати повне означення дійсних чисел, потрібно навести правило їх порівняння, а також правила додавання, віднімання, множення та ділення цих чисел.

4.2. Введемо на множині дійсних чисел R поняття "рівності", "більше" та "менше".

<u>Означення 1</u>. Два нескінченні десяткові дроби, тобто два дійсних числа, рівні між собою, якщо вони мають однакові знаки, однакові цілі частини і однакові цифри відповідних розрядів.

<u>Означення 2</u>. Якщо цілі частини двох додатних десяткових дробів різні, то з них більший той, у якого ціла частина більша. Якщо ж цілі частини однакові, то потрібно розглянути найменший із розрядів, для якого цифри дробів різні. Той дріб більший, у якого цифра цього розряду більша.

Визначимо тепер відношення порядку для довільних дійсних чисел. Покладемо:

1) якщо a – від'ємне число, b – додатне число, то $a < b$;

2) якщо a і b – від'ємні числа, причому $-a > -b$, то $a < b$;

3) нуль менший за всі додатні числа і більший за всі від'ємні числа.

Можна довести, що введені відношення "рівне", "більше", "менше" для дійсних чисел мають ті ж властивості, що й для раціональних чисел, а саме, для двох довільних дійсних чисел виконується одне і тільки одне з відношень – "рівне", "більше" або "менше".

Зокрема, користуючись наведеними вище означеннями для раціональних чисел a і b, прийдемо до тих же результатів, що й раніше.

Приклад 3. Порівняти нескінченні десяткові дроби (дійсні числа):

$a = 23{,}01001000100001\ldots$,

$a_1 = 23,\ 03\ = 23{,}030303\ldots$,

$a_2 = -11{,}232 = -11{,}232000\ldots$,

$a_3 = -11{,}23\ 06\ = -11{,}23060606\ldots$,

$0 = 0{,}000\ldots$,

$a_4 = 0{,}0000\ 2\ = 0{,}0000222\ldots$,

$a_5 = 23,\ 03\ = 23{,}030303\ldots$,

$a_6 = -0{,}123 = -0{,}123000\ldots$,

$a_7 = -11{,}23\ 06\ = -11{,}23060606\ldots$.

Розв'язання. Скориставшись правилами порівняння, отримуємо

$$a_2 < a_3 = a_7 < a_6 < 0 < a_4 < a < a_1 = a_5.$$

4.3. Перед тим, як ввести дії над дійсними числами, зупинимось на наближених значеннях нескінченних десяткових дробів.

Нехай додатне дійсне число a зображається нескінченним десятковим дробом

$$a = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots.$$

Перервемо цей дріб на деякому місці після коми. У результаті отримаємо скінченний десятковий дріб, який позначимо

$$\underline{a}_n = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

Цей дріб менший даного числа a або дорівнює йому, тобто

$$\underline{a}_n \le a .$$

Дріб $\underline{a}_n$ називається десятковим наближеним значенням додатного числа a з недостачею, що має точність $\dfrac{1}{10^n}$.

Якщо додатний нескінченний дріб перервати на деякому місці і до останньої цифри додати одиницю, то отримаємо скінченний десятковий дріб

$$\overline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots\ \alpha_n + 1\ ,$$

більший даного числа a. Такий дріб називається десятковим наближеним значенням додатного числа a з надлишком, що має точність $\dfrac{1}{10^n}$.

Отже, виконуються нерівності

$$\underline{a}_n \le a < \overline{a}_n , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

або більш докладно

$$\alpha_0 \le a < \alpha_0 + 1$$

$$\alpha_0, \alpha_1 \le a < \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}$$

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \le a < \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2}$$

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \le a < \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \frac{1}{10^3}$$

$$\ldots$$

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \le a < \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n}$$

причому $\overline{a}_n - \underline{a}_n = \dfrac{1}{10^n}$.

Справедливі також нерівності

$$\underline{a}_1 \le \underline{a}_2 \le \underline{a}_3 \le \ldots \le \underline{a}_n \le \ldots$$

або

$$\underline{a}_n \le \underline{a}_{n+1} \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots$$

і нерівності

$$\overline{a}_1 > \overline{a}_2 > \overline{a}_3 > \ldots > \overline{a}_n > \ldots$$

або

$$\overline{a}_n > \overline{a}_{n+1} \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Отже, числа $\underline{a}_n$ не спадають зі зростанням n і залишаються весь час не більшими числа a. Числа $\overline{a}_n$ спадають і залишаються не меншими числа a. Крім цього, різниця $\overline{a}_n-\underline{a}_n$ зі зростанням n наближається до нуля:

$$\overline{a}_n-\underline{a}_n=10^{-n}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty .$$

Для від'ємного числа a

$$a=-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$$

наближенням з надлишком є число

$$\overline{a}_n=-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,$$

а з недостачею – число

$$\underline{a}_n=-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n-\frac{1}{10^n}=-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\ \alpha_n+1\ ,$$

причому виконуються нерівності

$$\underline{a}_n<a\le\overline{a}_n, \quad n=1,\ 2,\ldots .$$

Якщо число a – раціональне і зображається скінченним десятковим дробом, тобто його нескінченний запис закінчується послідовністю нулів

$$a=\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n000\ldots,$$

то при $a>0$ воно співпадає зі своїм наближенням з недостачею, що має точність $\dfrac{1}{10^k}$, де $k\ge n$, а при $a<0$ – зі своїм наближенням з надлишком тієї ж точності.

Наведемо декілька прикладів:

1) $a=1,23345\ldots$; $\underline{a}_3=1,233$; $\overline{a}_3=1,234$,

2) $a=-7,33745\ldots$; $\underline{a}_4=-7,3375$; $\overline{a}_4=-7,3374$,

3) $a=2,23$; $\underline{a}_2=2,23$; $\overline{a}_2=2,24$; $\underline{a}_3=2,230$; $\overline{a}_3=2,231$.

Зображення дійсних чисел їх десятковими, ще кажуть, раціональними наближеннями і можливість таких зображень з точністю до будь-якого десяткового знака лежить в основі визначення арифметичних дій над цими числами, а саме, дії над дійсними числами зводяться до дій над їх десятковими наближеннями з недостачею або надлишком.

Перейдемо до арифметичних дій над дійсними числами, причому будемо вводити ці дії лише описово.

Нехай a і b – два дійсних додатних числа; $\underline{a}_n$ і $\overline{a}_n$ $n=0, 1, 2,\ldots$ – десяткові наближення числа a відповідно з недостачею та надлишком:

$$\underline{a}_n\le a<\overline{a}_n, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots, \tag{2}$$

а $\underline{b}_n$ і $\overline{b}_n$ $n=0, 1, 2,\ldots$ – відповідні десяткові наближення числа b:

$$\underline{b}_n\le b<\overline{b}_n, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots . \tag{3}$$

Сумою $a+b$ дійсних додатних чисел a і b називають дійсне число, яке більше або рівне суми їх довільних десяткових наближень з недостачею і менше суми їх довільних десяткових наближень з надлишком.

Зокрема, якщо десяткові наближення чисел a і b одного порядку, то

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n \le a + b < \overline{a}_n + \overline{b}_n. \tag{4}$$

Отже, якщо

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n \le c < \overline{a}_n + \overline{b}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{5}$$

то $c = a + b$.

У курсі математичного аналізу доводиться, що дійсне число $c = a + b$ існує і визначається нерівностями (5) однозначно.

Для знаходження суми раціональних чисел немає потреби у використанні нерівностей (5), оскільки у цьому випадку існують більш зручні правила (див. § 2). Якщо ж принаймні одне з чисел a або b ірраціональне, то для практичного знаходження суми с деякою точністю доводиться звертатися до нерівностей (5). Продемонструємо на прикладі спосіб знаходження десяткових знаків числа $a+b$.

Нехай

$$a = 2,521522\dots \quad \text{і} \quad b = 4,680808\dots.$$

Тоді

$\underline{a}_0 = 2$, $\overline{a}_0 = 3$; $\underline{b}_0 = 4$, $\overline{b}_0 = 5$;

$\underline{a}_1 = 2,5$, $\overline{a}_1 = 2,6$; $\underline{b}_1 = 4,6$, $\overline{b}_1 = 4,7$;

$\underline{a}_2 = 2,52$, $\overline{a}_2 = 2,53$; $\underline{b}_2 = 4,68$, $\overline{b}_2 = 4,69$;

$\underline{a}_3 = 2,521$, $\overline{a}_3 = 2,522$; $\underline{b}_3 = 4,680$, $\overline{b}_3 = 4,681$;

$\underline{a}_4 = 2,5215$, $\overline{a}_4 = 2,5216$; $\underline{b}_4 = 4,6808$, $\overline{b}_4 = 4,6809$,

$2 + 4 \le a + b < 3 + 5 \Leftrightarrow 6 \le a + b < 8$

$2,5 + 4,6 \le a + b < 2,6 + 4,7 \Leftrightarrow 7,1 \le a + b < 7,3$.

Отже, ціла частина числа $a+b$ дорівнює 7. З нерівностей

$$2,52 + 4,68 \le a + b < 2,53 + 4,69 \Leftrightarrow 7,20 \le a + b < 7,22$$

випливає, що перший десятковий знак числа $a+b$ дорівнює 2. Далі,

$$2,521 + 4,680 \le a + b < 2,522 + 4,681 \Leftrightarrow 7,201 \le a + b < 7,203.$$

Тому другий десятковий знак числа $a+b$ дорівнює 0. Аналогічно знаходяться подальші десяткові знаки.

Нерівності (4) отримуються почленним додаванням нерівностей (2) і (3). Нехай тепер обидва дійсні числа a і b – від'ємні. Тоді

$$\underline{a}_n < a \le \overline{a}_n \quad \text{і} \quad \underline{b}_n < b \le \overline{b}_n.$$

Звідси

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n < a + b \le \overline{a}_n + \overline{b}_n . \qquad (6)$$

Якщо ж від'ємним є лише одне з чисел a або b, наприклад, b, то

$$\underline{a}_n \le a < \overline{a}_n , \quad \underline{b}_n < b \le \overline{b}_n$$

і

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n < a + b < \overline{a}_n + \overline{b}_n . \qquad (7)$$

Всі три випадки (4), (6) і (7) можна охопити наступним означенням суми довільних дійсних чисел.

<u>Означення 3</u>. Сумою $a+b$ довільних дійсних чисел a і b називається дійсне число, яке більше або рівне суми їх довільних десяткових наближень з недостачею і менше або рівне суми їх довільних десяткових наближень з надлишком.

Перейдемо до добутку двох дійсних чисел.

<u>Означення 4</u>. Добутком ab дійсних додатних чисел a і b називається дійсне число c, яке більше або рівне добутку довільних десяткових наближень цих чисел з недостачею, але менше добутку їх довільних десяткових наближень з надлишком.

Зокрема, якщо $\underline{a}_n \le a < \overline{a}_n$ і $\underline{b}_n \le b < \overline{b}_n$, то добуток $c = ab$ чисел a і b визначається системою нерівностей

$$\underline{a}_n \underline{b}_n \le c < \overline{a}_n \overline{b}_n , \quad n = 0, 1, 2, \dots . \qquad (8)$$

У курсі математичного аналізу доводиться, що добуток $c = ab$ існує і визначається нерівностями (8) однозначно.

Для знаходження добутку раціональних чисел існують зручні правила і користуватися нерівностями (8) недоцільно. Якщо ж принаймні одне з чисел a або b ірраціональне, то для знаходження десяткових знаків добутку доводиться користуватися нерівностями (8). Покажемо це на прикладі.

Нехай потрібно знайти чотири десяткових знаки (цифри перших чотирьох розрядів) добутку $c = ab$, де $a = 1,34205\dots$ і $b = 1,63244\dots$. Будемо складати добутки $\underline{a}_n \underline{b}_n$ і $\overline{a}_n \overline{b}_n$ для різних n. Однакові десяткові знаки, що утворяться у цих добутках, будуть десятковими знаками числа $c = ab$. Оскільки нас цікавлять чотири десяткових знаки, то обчислення почнемо з $n = 4$:

$$\underline{a}_4 \underline{b}_4 = 1,3420 \cdot 1,6324 = 2,19068080 ;$$

$$\overline{a}_4 \overline{b}_4 = 1,3421 \cdot 1,6325 = 2,19097825 .$$

Тому

$$2,19068080 \le c < 2,19097825 .$$

Далі,

$$\underline{a}_5 \underline{b}_5 = 1,34205 \cdot 1,63244 = 2,1908161020 ,$$

$$\overline{a}_5\overline{b}_5 = 1,34206\cdot 1,63245 = 2,1908458470$$

і тому

$$2,1908161020 \le c < 2,1908458470 .$$

Отже, для чотирьох десяткових знаків добутку c маємо

$$c = 2,1908 .$$

Якщо a і b – довільні дійсні числа, відмінні від нуля $(a \ne 0,\ b \ne 0)$, то для знаходження добутку ab потрібно помножити абсолютні величини чисел a і b згідно з означенням 4 і результат взяти зі знаком плюс, якщо співмножники мають однакові знаки, і зі знаком мінус, якщо їх знаки різні.

Якщо хоча б один із співмножників дорівнює нулю, то добуток також дорівнює нулю:

$$a\cdot 0 = 0, \quad 0\cdot a = 0, \quad 0\cdot 0 = 0 .$$

Віднімання на множині дійсних чисел R визначається як операція, обернена додаванню. Оскільки для кожного числа b в R існує протилежне йому число $-b$, тобто таке, що $b + (-b) = 0$, то віднімання числа b рівносильне додаванню числа $-b$:

$$a - b = a + (-b) .$$

Дійсно, для довільних чисел a і b з R маємо

$$\left[a + (-b)\right] + b = a + \left[(-b) + b\right] = a ,$$

а це й означає, що $a - b = a + (-b)$.

Якщо, наприклад, числа a і b визначаються системою нерівностей $\underline{a}_n \le a < \overline{a}_n$ і $\underline{b}_n \le b < \overline{b}_n$, то для їх різниці можна записати

$$\underline{a}_n - \overline{b}_n < a - b < \overline{a}_n - \underline{b}_n , \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Різниця довільних дійсних чисел завжди існує і є єдиною, тобто множина дійсних чисел R замкнена відносно віднімання.

Якщо число b не дорівнює нулю, то для довільного числа $a \in R$ знайдеться таке число $c \in R$, що $a = b\cdot c$. Число c називають *часткою* від ділення a на b і позначають $a : b$ або $\dfrac{a}{b}$.

Якщо числа a і b додатні і визначаються системами нерівностей $\underline{a}_n \le a < \overline{a}_n$ і $\underline{b}_n \le b < \overline{b}_n$, то система нерівностей, яка визначає частку $\dfrac{a}{b}$, має вигляд

$$\frac{\underline{a}_n}{\overline{b}_n} \le \frac{a}{b} < \frac{\overline{a}_n}{\underline{b}_n} , \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Якщо ж a і b – довільні дійсні числа, відмінні від нуля $(a \neq 0, b \neq 0)$, то для знаходження частики $\frac{a}{b}$ потрібно поділити абсолютну величину числа a на абсолютну величину числа b і результат взяти зі знаком плюс, якщо a і b мають однакові знаки, і зі знаком мінус, якщо їх знаки різні.

Якщо ділене дорівнює нулю, то і частка дорівнює нулю:

$$\frac{0}{a} = 0 \quad (a \neq 0).$$

Частка $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ завжди існує і визначається однозначно. Ділення на нуль неможливе.

Отже, множина дійсних чисел R є замкненою відносно додавання, віднімання, множення та ділення (за виключенням ділення на нуль).

Для математичного аналізу важливо не стільки те, що зображають собою дійсні числа, а те, які властивості вони мають. Наведемо ряд властивостей дійсних чисел, які в подальшому будуть часто використовуватись:

$$a + b = b + a; \quad a + (b + c) = (a + b) + c; \quad a + 0 = a;$$

$$a + (-a) = 0; \quad ab = ba; \quad a(bc) = (ab)c; \quad a \cdot 1 = a;$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0); \quad a(b + c) = ab + ac;$$

$$\text{якщо } a > b, \text{ а } b > c, \text{ то } a > c; \quad \text{якщо } a > b, \text{ то } a + c > b + c;$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0); \quad |a + b| \leq |a| + |b|.$$

4.4. Нагадаємо відомий зі шкільного курсу алгебри спосіб зображення дійсних чисел точками прямої.

Нехай l – деяка пряма. Візьмемо на ній довільну точку O, яку будемо називати "початком". Точка O розбиває пряму l на два промені. Один з цих променів називають додатним, а другий – від'ємним.

На рисунках додатний промінь позначають стрілкою. Зазвичай, пряма l зображається горизонтально, а за додатний промінь береться той, що йде від точки O вправо. Деякий відрізок MN приймається за одиницю вимірювання (рис. 3).

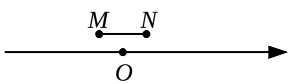

Рис. 3

Кожній точці A на прямій l ставиться у відповідність число x наступним чином: якщо точка A лежить на додатному промені, то за x приймається довжина відрізка OA (рис. 4); якщо A лежить на від'ємному промені, то за x приймається від'ємне число, абсолютна величина якого дорівнює довжині відрізка OA (рис. 5). Якщо точка A співпадає з початком, то покладається $x = 0$.

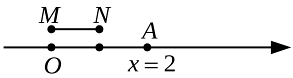

Рис. 4

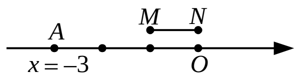

Рис. 5

Отже,

$$x = \begin{cases} |OA|, & \text{якщо } A \text{ лежить на додатному промені}, \\ -|OA|, & \text{якщо } A \text{ лежить на від'ємному промені}, \\ 0, & \text{якщо } A \text{ співпадає з } O. \end{cases}$$

Тут через $|OA|$ позначено довжину відрізка OA. Число x називають координатою точки A. Оскільки довжина кожного відрізка при вибраній одиниці вимірювання визначається однозначно, то кожна точка прямої однозначно зображає деяке дійсне число. Навпаки, кожне дійсне число зображається єдиною точкою прямої.

Описаний спосіб зображення чисел точками прямої встановлює взаємно-однозначну відповідність між множиною дійсних чисел і множиною точок прямої. Ця пряма називається *числовою прямою* або *числовою віссю*.

Для наочності на числовій осі вказують точки, що мають цілочислені координати: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ і записують ці координати під відповідними точками (рис. 6). У цьому випадку зображати на рис. 6 одиницю вимірювання не обов'язково, оскільки довжина відрізка з кінцями в точках 0 і 1 дорівнює одиниці вимірювання.

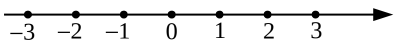

Рис. 6

Відмітимо, що у випадку $x_2 > x_1$ точка, що зображає число x_2, лежить праворуч точки, що зображає число x_1.

Взаємно-однозначна відповідність між точками прямої і дійсними числами дозволяє ототожнити число x і точку A, яка його зображає. Зазвичай, кажуть точка x. Доведене раніше твердження про існування між двома довільними раціональними числами r_1 та r_2 нескінченної множини раціональних чисел має наступну геометричну інтерпретацію: між довільними двома раціональними точками r_1 та r_2 числової осі знаходиться нескінченна множина раціональних точок цієї осі, тобто множина раціональних точок є щільною на числовій осі.

На цьому ми закінчуємо знайомство з побудовою множини дійсних чисел. Дійсні числа в курсі математичного аналізу відіграють надзвичайно важливу роль – вони є його числовим фундаментом.

§ 5. Логічні знаки

Математичний текст складається з математичних формул і власне, тексту, в якому часто повторюються окремі слова і цілі вирази. Тому при їх записах доцільно користуватися логічною символікою. Ми будемо використовувати наступні логічні знаки.

1) Нехай A і B – деякі судження. Тоді запис $A \Rightarrow B$ означає, що з A випливає B. При цьому часто говорять, що B є необхідною ознакою або необхідною умовою A, а A – достатньою ознакою або достатньою умовою B (див. § 3 Вступу до книги 1).

2) Запис $A \Leftrightarrow B$ читається одним з таких способів:

A необхідно і достатньо для B;

A тоді і тільки тоді, коли B;

A рівносильно B.

3) Замість слова "існує" або "знайдеться" використовують символ $\exists$ [перевернута латинська буква E (від англійського слова Existence – існування].

4) Замість слів "існує тільки один" використовують символ $\exists!$.

5) Замість слів "для всіх" або "для кожного" використовується символ $\forall$ [перевернуте латинське A (від англійського слова Any – довільний)].

6) Замість слів "за означенням" використовують запис $\stackrel{\text{def}}{=}$ або $:=$ (від англійського слова Definition – означення).

Наведемо приклади використання логічних знаків в теорії множин (див. § 1 Вступу до книги 1).

1) Запис $\exists x \in X$ означає: існує елемент x з множини X.

2) Запис $\forall x \in X$ означає: для довільного елемента x з множини X.

3) Запис $\forall x \;\; x \in \mathrm{A} \Leftrightarrow x \in \mathrm{B}$ означає: для довільного елемента x співвідношення $x \in \mathrm{A}$ і $x \in \mathrm{B}$ рівносильні, тобто $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

4) Запис $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \;\; x \in \mathrm{A} \Rightarrow x \in \mathrm{B}$ означає: $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ за означенням, якщо для довільного елемента $x \in \mathrm{A}$ випливає, що $x \in \mathrm{B}$.

Зміст

Передмова 3
Вступ 5
§ 1. Натуральні та цілі числа...5
§ 2. Раціональні числа 8
§ 3. Десяткові дроби. Зображення раціональних чисел десятковими дробами 11
§ 4. Ірраціональні числа. Дійсні числа 16
§ 5. Логічні знаки 27

Частина 1. Вступ до аналізу функцій однієї та декількох змінних
Глава І. Границя послідовності 29
§ 1. Числові послідовності та їх властивості 29
§ 2. Границя послідовності та її властивості 36
§ 3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.......................48
§ 4. Правила обчислення границь послідовностей 56
§ 5. Нижня та верхня межі числової множини 67
§ 6. Ознака збіжності монотонної послідовності 73
§ 7. Число e 80
Глава ІІ. Функції однієї змінної 84
§ 1. Функції та способи їх задання 84
§ 2. Парність, непарність та періодичність функцій....................................92
§ 3. Обмежені та монотонні функції 98
§ 4. Складна функція. Обернена функція 104
§ 5. Основні елементарні функції. Елементарні функції.............................109
Глава ІІІ. Границя функції...127
§ 1. Поняття границі функції у точці 127
§ 2. Різні типи границь 135
§ 3. Властивості границь функцій 141
§ 4. Нескінченно малі та нескінченно великі функції 145
Глава IV. Неперервні функції 154
§ 1. Означення неперервності функції у точці 154
§ 2. Властивості функцій, неперервних у точці 157
§ 3. Точки розриву функції та їх класифікація...160
§ 4. Властивості функцій, неперервних на відрізку.....................................165
§ 5. Степінь з дійсним показником..175
§ 6. Неперервність елементарних функцій 184
§ 7. Дві важливі границі 193
§ 8. Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих функцій 201
§ 9. Еквівалентні нескінченно малі функції 207
§ 10. Застосування теорії границь до знаходження асимптот кривої........219
Глава V. Вступ до аналізу функцій кількох змінних 226
§ 1. Означення n-вимірного евклідового простору R_n 226

§ 2. Найпростіші точкові множини у просторі R_n 229
§ 3. Границя послідовності точок простору R_n 236
§ 4. Принцип вкладених кубів 238
§ 5. Функції двох змінних 239
§ 6. Функції трьох та більшого числа змінних 245
§ 7. Границя функції кількох змінних 248
§ 8. Неперервні функції кількох змінних 254
§ 9. Функції, неперервні у замкнених обмежених областях 264

Частина 2. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних

Глава VI. Похідна 268
§ 1. Задачі, що приводять до поняття похідної 268
§ 2. Означення похідної, її фізичний та геометричний зміст 273
§ 3. Поняття диференційовності функції 285
§ 4. Правила диференціювання 289
§ 5. Похідні основних елементарних функцій 297
§ 6. Приклади знаходження похідних 306
§ 7. Логарифмічна похідна. Диференціювання показниково-степеневої функції 311
§ 8. Диференціювання неявних функцій та функцій, заданих параметрично 313
§ 9. Похідні вищих порядків 315
§ 10. Застосування похідних у доведенні формули бінома Ньютона. Формула Лейбніца 321

Глава VII. Диференціал 326
§ 1. Означення диференціала функції, його фізичний та геометричний зміст 326
§ 2. Властивості диференціалів 329
§ 3. Диференціали вищих порядків 333
§ 4. Застосування диференціала до наближених обчислень 337

Глава VIII. Основні теореми диференціального числення 345
§ 1. Теореми Ферма та Ролля 345
§ 2. Теореми Лагранжа та Коші 349
§ 3. Розкриття невизначеностей (правило Лопіталя) 357
§ 4. Формула Тейлора 369
§ 5. Формули Маклорена деяких елементарних функцій 377
§ 6. Застосування формули Тейлора 379

Глава IX. Дослідження функцій за допомогою похідних 388
§ 1. Дослідження функцій на зростання та спадання 388
§ 2. Максимум та мінімум функції 398
§ 3. Глобальний екстремум неперервної функції на відрізку 408
§ 4. Приклади застосувань похідної 414
§ 5. Дослідження графіків функцій на угнутість та опуклість. Точки перегину 418

§ 6. Загальна схема дослідження функцій і побудови їх графіків 432
Глава X. Похідні та диференціали функцій кількох змінних.................446
§ 1. Частинні похідні 446
§ 2. Повний диференціал...452
§ 3. Застосування повного диференціала до наближених обчислень........463
§ 4. Диференціювання складної функції...467
§ 5. Диференціали складних функцій 474
§ 6. Дотична площина. Геометричний зміст диференційовності та повного диференціала функції двох змінних 477
§ 7. Частинні похідні та диференціали вищих порядків............................483
§ 8. Формула Тейлора для функцій двох змінних.......................................495
§ 9. Похідна у даному напрямі. Градієнт...500
§ 10. Екстремум функції двох змінних. 507
Глава XI. Неявні функції..521
§ 1. Неявні функції однієї змінної 521
§ 2. Неявні функції кількох змінних 527
§ 3. Неявні функції, що задаються системою рівнянь 530
§ 4. Диференціювання неявних функцій 537
§ 5. Геометричні застосування..548
§ 6. Умовний екстремум...555