***Чемерис О. А.,***
*кандидат педагогічних наук,*
*доцент кафедри алгебри та геометрії*

# ТЕОРЕМА СИНУСІВ: ІСТОРИКО-МЕТОДИЧНИЙ АСПЕКТ

*«Серед рівних розумом – за однакових інших умов – переважає той, хто знає геометрію» (Б. Паскаль)*

Назви ліній синуса та косинуса уперше були введені індійськими вченими. Вони ж склали перші таблиці синусів і в Індії починається по суті вчення про тригонометричні величини, назване пізніше гоніометрією (від "гоніа" – кут і "мехріо" – вимірюю).

Найпершою тригонометричною функцією була *хорда,* що відповідає своїй дузі. Для цієї функції були побудовані перші тригонометричні таблиці (II ст. до н. е.) для потреб астрономії.

Далі уперше в історії науки в період V–XII ст. індійські математики й астрономи замість повної хорди стали розглядати половину, яка відповідає сучасному поняттю синуса. Величину половини хорди вони назвали «архиджива», що означало «половина тятиви лука». Окрім *sin(x),* індійці розглядали також величину *1 – cos(x),* яку вони називали «комаджива», і величину *cos(x)* – «котиджива».

Подальший розвиток вчення про тригонометричні величини отримало в IX-XV ст. у країнах Середнього і Ближнього Сходу в працях ряду математиків, які не лише скористалися досягненнями, що існували у той час, в цій області, але і зробили свій значний внесок у науку.

Також Ф. Вієт встав у витоків створення нової науки – тригонометрії. Багато тригонометричних формул уперше було записано цим науковцем. У 1593 році він першим сформулював в словесній формі теорему косинусів. З інших відкриттів Вієта слід зазначити вираження для синусів і косинусів кратних дуг через *sin(x)* і *cos(x).*

Поняття таких тригонометричних функцій, як тангенс, котангенс, секанс і косеканс, визначив абсолютно строго, виходячи з розгляду тригонометричного кола, іранський математик Абу-ль-Вефа. Сучасні назви цих функцій були дані в період з XV по XVII століття європейськими ученими. Так, термін «тангенс» з латинської «дотична» був введений в XV столітті засновником тригонометрії в Європі Регіомонтаном (німецьким астрономом і математиком Йоганном Мюллером (1436-1476)). У XVI столітті Фінк вводить термін «секанс». У XVII столітті помічник винахідника десяткових логарифмів Бріггса вчений Гюнтер вводить назву «косинус» і «котангенс», причому префікс «ко» (*co*) означає доповнення (complementum).

Сучасні позначення синуса і косинуса знаками *sin(x)* і *cos(x)* були уперше введені в 1739 році І. Бернуллі в листі до петербурзького математика Л. Ейлера. Дійшовши висновку, що ці позначення дуже зручні, він став вживати їх у своїх математичних роботах. Крім того, Ейлер вводить наступні скорочення для позначень тригонометричних функцій кута *x* : *tang(x), cot(x), sec(x), cosec(x).*

Найдавніше із доведень теореми синусів, що дійшли до нас, на площині описано в книзі Насир Ад-Дин Ат-Тусі «Трактат про повний чотиристоронник» (XIII ст.).

Теорема синусів для сферичного трикутника була доведена математиками середньовічного Сходу ще в X столітті. У праці Ал-Джайяни XI століття «Книга про невідомі дуги сфери» наводилося загальне доведення теореми синусів на сфері.

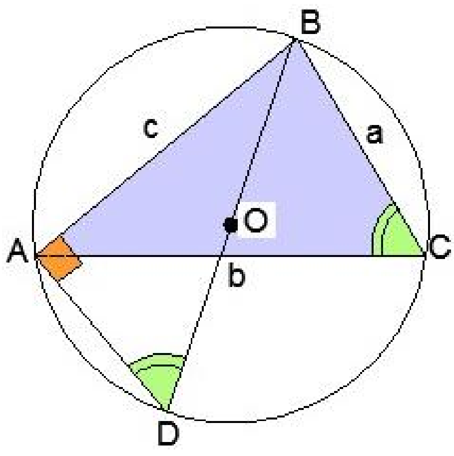
У 10 ст. багдадський вчений Мухаммед з Буджана, відомий під ім'ям Абу-ль-Вефа сформулював теорему синусів. Насир-ед-Дин з Туса (1201-1274) систематично розглянув усі випадки розв’язування косокутних сферичних трикутників і вказав ряд нових способів. У 12 ст. був перекладений з арабського на латинь ряд астрономічних робіт, що дозволило ознайомитися з ними європейцям. До речі, саме Регіомонтан через 200 років після Насир-ед-Дина заново відкрив його теореми.

Отже, **теорема синусів** формулюється так: сторони довільного трикутника пропорційні синусам протилежних кутів, тобто: $\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC}$. (Теорема вивчається в шкільному курсі планіметрії в 9 класі в темі «Розв’язування трикутників»).

**Наслідок з теореми синусів**: у будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника, тобто: $\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} = 2R$

Дана рівність дозволяє знаходити радіус кола за двома елементами трикутника. Це дуже часто використовують укладачі завдань середнього та вищого рівнів складності, коли на перший погляд, дані в умові задачі не зв’язані між собою.

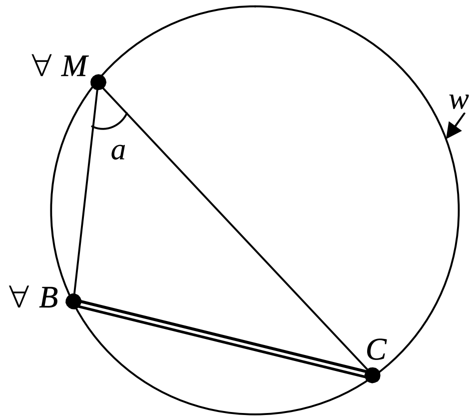
***Доведення***:




Опишемо навколо заданого трикутника *ABC* коло і через вершину *B* проведемо її діаметр *BD*. Оскільки кути *ADB* і *BCA* спираються на одну дугу, то вони рівні (наслідок з теореми про вписані кути). Тоді $\frac{c}{SinC} = \frac{c}{SinD}$. Скористаємось в трикутнику *ABD* означенням синуса кута *D* :

$SinD = \frac{c}{2R} \Longrightarrow \frac{c}{SinC} = 2R$, що й вимагалося довести.

Підказкою у розв'язанні задачі на побудову за теоремою синусів є включення в набір даних радіуса описаного кола навколо трикутника та його кута. Наприклад, розв'язати наступну задачу: *побудувати трикутник за радіусом описаного кола, кутом та медіаною, яка виходить з вершини цього кута* $(R, a, m_a)$. Якщо ми знайдемо сторону, що лежить проти заданого кута, то задачу ми розв'яжемо методом геометричних місць.




Отже, на етапі «Побудова» знаходження сторони трикутника реалізуємо в наступні кроки:

1. З довільної точки $O$ площини заданим радіусом $R$ проводимо коло $w(O, R)$.

2. Через довільну точку $M$ кола $w$ проводимо довільну хорду (нехай $MB$).

3. Відкладемо $\angle BMC = a$ (точка $C$ належить колу $w$).

4. З'єднуємо $BC$ – це сторона $a$ шуканого трикутника $ABC$.

Іноді зручно сформулювати теорему синусів так, щоб вона не містила тригонометричних функцій. Це дає змогу розв'язувати задачі без використання кутів.

Отже, у будь-якому трикутнику мають місце співвідношення:

$$\frac{bc}{h_a} = \frac{ac}{h_b} = \frac{ab}{h_c} = 2R.$$

Рівність лівих частин формул для площ трикутника, наприклад, $S = \frac{1}{2}\, a\, b\, \sin\gamma$, $S = \frac{1}{2}\, c\, h_c$ та елементарні перетворення доводять справедливість нашого запису.

На нашу думку, всебічний аналіз та поглиблене вивчення базових теорем планіметрії формують математичну культуру та дають можливість ефективнішими способами розв'язувати складні задачі та робити відповідні узагальнення.

***Література***


1. Боравльов А. П. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову / Боравльов А. П., Ленчук І. Г. – К. : Вища школа, 2002. – 191 с.
2. Бурда М. І. Геометрія : підручник для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. – Київ : «Зодіак-Еко», 2009. – 241 с.
3. История возникновения тригонометрических функций [Електронний ресурс]. – Режим доступу до сторінки: http://slovari.yandex.ru/dict/krugosvet/article/c/c7/1011993.htm.
4. Колпаков А. Н. Теорема синусов [Електронний ресурс]. – Режим доступу до сторінки: http://www.ankolpakov.ru/teorema-sinusov.

5. Белешко Д. Базові теореми планіметрії: елективний курс / Дмитро Белешко, Олег Дейнека; [відп. за вип. О. Лісовий]. – К. : ТОВ «Праймдрук», 2012. – 48 с.