Коржевська Наталія,
студентка IV курсу, спеціальність «Математика».
Науковий керівник – ***Сверчевська І. А.****,*
кандидат педагогічних наук, доцент

НЕСКІНЧЕННІ НЕПЕРЕРВНІ ДРОБИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Неперервні дроби були об'єктом дослідження і застосування відомих математиків минулого, зокрема, Л. Ейлера, К. Гаусса, П. Чебишева, Б. Рімана. Історично в теорії неперервних дробів утворилося два напрямки. В першому вивчаються скінченні неперервні дроби, які є розкладом раціональних чисел за алгоритмом Евкліда. В другому – алгоритми розкладу ірраціональних чисел в нескінченні неперервні дроби, оцінки похибок наближень за допомогою підхідних дробів.

Метою статті є розгляд нескінченних неперервних дробів та їх застосувань для розкладу деяких ірраціональних чисел.

Означення 1. Нескінченним неперервним дробом називається вираз виду

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \qquad (1)$$

де a_0 – ціле число, а всі інші a_n – натуральні числа, тобто $a_n \geq 1$ при $n=1,$ $2, \ldots$

Означення 2. Підхідним дробом $\frac{P_n}{Q_n}$ до нескінченного неперервного дробу (1) називається скінченний неперервний дріб

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} \qquad (2)$$

Означення 3. Нескінченний дріб (1) називається збіжним, якщо існує границя його підхідних дробів, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}$. [1, с. 211].

Теорема 1. Будь-який нескінченний неперервний дріб збігається [1, с. 213]

Теорема 2. Для будь-якого дійсного числа існує розклад в неперервний дріб.

З доведення теореми слідує, що для заданого ірраціонального числа α існує алгоритм, який дозволяє знайти неперервний дріб, рівний α [1, с. 216].

Приклад 1. Розкладемо в неперервний дріб число $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, що є відношенням золотого перерізу.

Знаходимо: $a_0 = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 1,\ \alpha_1 = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Оскільки $\alpha_1 = \alpha$, будемо мати $a_1 = [\alpha_1] = [\alpha] = a_0 = 1,$ тому $\alpha_2 = \alpha_1$ і т.д.

В послідовних рівностях буде $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots,\ a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 1$, тобто

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{}{1+\ddots}} = [1;(1)]$$

Із множин всіх нескінченних ланцюгових дробів виділимо підмножину періодичних дробів. Будь-який періодичний ланцюговий дріб виражає квадратичну ірраціональність, і навпаки, будь-яка квадратична ірраціональність зображається періодичним ланцюговим дробом.

Приклад 2. Розкладемо $\sqrt{2}$ в нескінченний неперервний дріб [2, с. 22].

Отримуємо: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1},\quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1,\ \alpha_1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2},\quad \alpha_2 = \sqrt{2}+1 = \alpha_1$

.

Видно, що $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha}}}}$, де $\alpha = \sqrt{2}+1$

Представимо $\sqrt{2}$ у вигляді нескінченного неперервного дробу:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}} = [1;2,2,2,2,\ldots] = [1;(2)].$$

Приклад 3. Розкладемо число $\sqrt{11}$.

$a_0 = [\sqrt{11}] = 3$

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{\alpha_1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_1} = \sqrt{11} - 3,\ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{11}-3} = \frac{\sqrt{11}+3}{11-9} = \frac{\sqrt{11}+3}{2}$$

$a_1 = [\alpha_1] = 3$

$$\alpha_1 = 3 + \frac{1}{\alpha_2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_2} = \alpha_1 - 3 = \frac{\sqrt{11}+3}{2} - 3 = \frac{\sqrt{11}-3}{2},$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{11}-3} = \frac{2(\sqrt{11}+3)}{11-9} = \frac{2(\sqrt{11}+3)}{2} = \sqrt{11}+3.$$

$a_2 = [\alpha_2] = 6$

$$\alpha_2 = 6 + \frac{1}{\alpha_3} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_3} = \alpha_2 - 6 = \sqrt{11}+3-6 = \sqrt{11}-3,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{11}-3} = \frac{\sqrt{11}+3}{2} = \alpha_1, \quad a_3 = [\alpha_3] = [\alpha_1] = 3,$$

$a_4 = 6$ і т.д.

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{\alpha_1} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\alpha_3}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}} = [3;3,6,3,6,\ldots] = [3;(3,6)]$$

У статті розглянуто деякі теоретичні питання про нескінченні неперервні дроби, які використані для розкладу ірраціональних чисел, зокрема відношення золотого перерізу.

Література

1. Бухштаб А. А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. – М. : Просвещение, - 1966. – 384 с.
2. Бескин Н. М. Цепные дроби / Н.М. Бескин // Квант. – 1970. – № 1. – С. 16–25.