Куделя Марина,
студентка IV курсу, спеціальність «Математика»
Науковий керівник – ***Сверчевська І. А.****,*
кандидат педагогічних наук, доцент

ГЕОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КУБІЧНИХ РІВНЯНЬ

Історично виникло ряд підходів до розв’язання кубічного рівняння: розв’язування в радикалах, геометричні методи, методи вищої алгебри.

Розглянемо деякі геометричні методи розв’язування кубічних рівнянь.

Перший підхід полягає в тому, що будується графік функції $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ і точки перетину графіка з віссю *OX* визначають корені рівняння.

Способи побудови графіка можуть бути різні: використовувати методи диференціального числення або поступово перетворювати графік кубічної параболи $y = x^3$. На першому кроці переходимо до графіка $y = ax^3$, на другому будується графік функції $y = ax^3 + mx$ методом складання двох графіків кривої $y = x^3$ і прямої $y = mx$. Щоб побудувати графік кривої $y = ax^3 + +bx^2 + cx + d$, використовуємо твердження: для будь-якої кривої $y = ax^3 + +bx^2 + cx + d$ завжди можна знайти такі дійсні числа *m, k, h,* що її графік будується зміщенням графіка $y = ax^3 + mx$ на *h* вліво та на *k* вниз. Справді, при такому перетворенні отримаємо криву, яка описується рівнянням : $y + k = a(x + h)^3 + m(x + h)$.

$$y = ax^3 + 3ahx^2 + (3ah^2 + m)x + (ah^3 + mh - k).$$

Цей многочлен співпадає з многочленом (1), якщо $b = 3ah$, $c = 3ah^2 + m$ та $d = ah^3 + mh - k$, тобто якщо числа *h, m i k* дорівнюють $h = \frac{b}{3a}$, $m = c - \frac{b^2}{3a}$, $k = \frac{bc}{3a} - \frac{2b^3}{27a^2} - d.$

Приклад. Знайти корені рівняння $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$ [1, с. 26-28]

Побудуємо графік функції .

Використовуючи виведені формули, знаходимо:

$$m = -9\frac{1}{3}, \ h = -1\frac{1}{3}, \ k = -5\frac{25}{27}.$$

Для цього нам потрібно побудувати графік функції

$y = x^3 - \frac{28}{3}x$ (рис. 1), а потім змістити його на вправо вздовж осі абсцис і на $\frac{160}{27}$ вгору вздовж осі ординат (рис. 2).

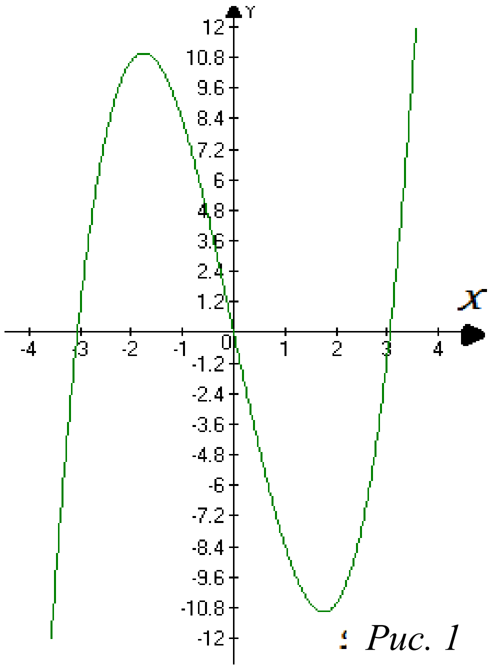

Рис. 1

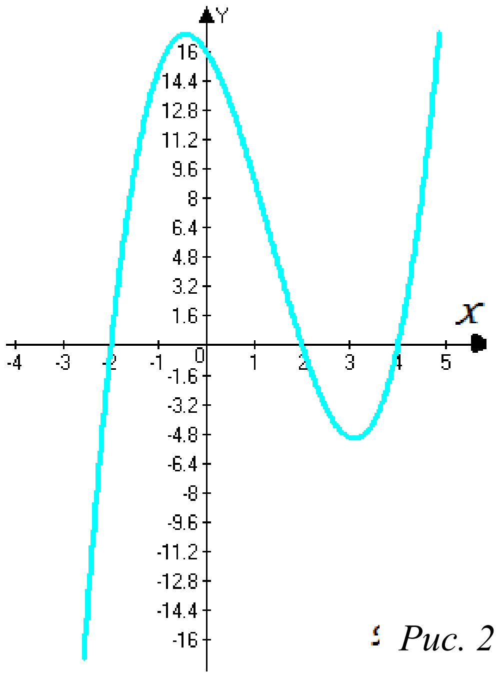

Рис. 2

Точки перетину графіка з віссю *OX* є коренями рівняння: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

Другий підхід – це наближене розв'язування кубічного рівняння за допомогою графіків кубічної параболи і прямої. Зауважимо, що в цьому методі рівняння $ax^3 + +bx^2 + cx + d = 0$ необхідно звести до вигляду $y^3 + py + q = 0$. Для цього досить розглянути зведене рівняння $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Довільне рівняння можна звести до зведеного по членним діленням на a . Покладемо в зведеному рівнянні $x = y + c$, де *c* – невідома константа, дістанемо:

$$y^3 + (3c + a_2)y^2 + (3c^2 + 2a_2c + a_1)y + (c^3 + a_2c^2 + a_1c + a_0) = 0$$ нехай $c = -\frac{a^2}{3}$,

тоді маємо рівняння: $$y^3 + \left(-\frac{a_2^2}{3} + a_1\right)y + \left(\frac{2}{27}a_2^3 - \frac{a_1a_2}{3} + a_0\right) = 0$$.

Отже, розглянемо метод визначення коренів рівняння $x^3 + px + q = 0$. Зведемо його до вигляду $x^3 = -px - q$ і знайдемо точки перетину кубічної параболи і прямої $y = -px - q$.

Приклад. Графічно визначити корені рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$

Запишемо рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$ у вигляді $x^3 = 3x + 1$. Розв'язати це рівняння означає знайти абсциси точок перетину кубічної параболи $y = x^3$ з прямою $y = 3x + 1$. Побудуємо графіки даних функцій: з рис. 3 бачимо, що вони перетинаються в трьох точках *A* (-1,5; -3,6), *B*(-0,3; 0) та *C* (1,9; 6,5).

Отже, рівняння має три корені $x_1 = -1{,}5;$ $x_2 = -0{,}3;$ $x_3 = 1{,}9.$

Третій підхід до геометричного розв'язання кубічного рівняння, це метод запропонований в XI столітті Омаром Хайямом. Він розглядав перетин двох парабол, параболи і кола, параболи та гіперболи тощо [2, с. 53].

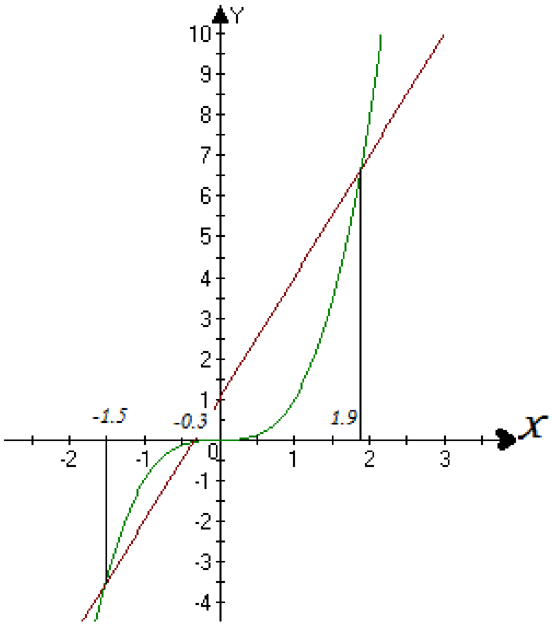

Рис. 3

Так рівняння $x^3 + a = cx^2$ Омар Хайям розв'язував за допомогою перетину параболи $y^2 = \sqrt[3]{a(c-x)}$ та гіперболи $xy = \sqrt[3]{a^2}$. Доведемо це, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 = \sqrt[3]{a(c-x)} \\ xy = \sqrt[3]{a^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y^2 = \sqrt[3]{a(c-x)} \\ x^2y^2 = \sqrt[3]{a^4} \end{cases}, \quad \begin{cases} y^2 = \sqrt[3]{a(c-x)} \\ x^2\sqrt[3]{a(c-x)} = \sqrt[3]{a^4} \end{cases}$$

Перетворимо друге рівняння: $x^2(c-x) = \sqrt[3]{a^3}$; $x^2(c-x) = a$; $x^3 + a = cx^2$
Одержали дане рівняння.

Пошуки методів розв'язування кубічних рівнянь мають теоретичне і практичне значення. Так, це призвело до відкриття комплексних чисел, які згодом знайшли практичне застосування. Важливо також, що кубічні рівняння є математичними моделями деяких задач.

Література

1. Жаутыков О. А. График кубического четырехчлена / О. А. Жаутыков // Квант. –1972. – № 6. – С. 26-28
2. Бевз В. Г. Практикум з історії математики / В. Г. Бевз. – К. : НПУ ім. Драгоманова, 2004. – 312 с.