Грицай Наталія,
студентка V курсу,спеціальність «Математика і економіка».
Науковий керівник ***– Сверчевська І. А.,***
кандидат педагогічних наук,доцент

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ З ЕКОНОМІЧНИМ ЗМІСТОМ

Диференціальне числення дає змогу розв'язувати великий спектр задач економічного змісту, досліджувати економічні процеси, явища [1].

Розвиток поняття математичної концепції похідної як швидкості зміни функції стимулює її застосування у сфері науково-технічних досліджень та лабораторних випробувань.

Низка наук розглядають питання про швидкість зміни функції: інженер розглядає швидкість, з якою рідина заповнює резервуар; етнограф цікавиться зміною густоти населення в місті, залежно від збільшення відстані від його центру; метеоролог – швидкістю зміни атмосферного тиску з урахуванням висоти. Найважливішою задачею економіки є задача отримання підприємством максимального прибутку при мінімальних затратах за визначений проміжок часу. Розглянемо застосування похідної при побудові **математичної моделі** для розв'язання економічної задачі.

Нехай C – загальна вартість корпоративних витрат на виробництво x одиниць певної продукції. C(x) – функція вартості. При збільшенні кількості збільшеної продукції від x_1 до x_2 з'являється додаткова вартість, яку позначимо $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$. Тоді середня швидкість зміни вартості:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}.$$

Границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ є миттєвою швидкістю зміни вартості відносно виробленої кількості одиниць продукції, а саме похідна функції вартості називається в економіці **маржинальною вартістю**. Функція маржинальної вартості позначається $C'(x)$.

$$C'(x) = \lim \frac{\Delta C}{\Delta x}.$$

Для випадку, коли x може набувати лише цілих значень, вираз $\Delta x \to 0$ може не мати конкретного змісту. Візьмемо $\Delta x = 1$, $n \to \infty$ і запишемо

$C'(n) \approx C(n+1) - C(n)$.

Тоді маржинальна вартість виробництва n одиниць продукції приблизно еквівалентна вартості виробництва ще однієї додаткової одиниці.

Функцію загальної вартості часто розглядають як многочлен $C(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, де а – умовно-постійні витрати (оренда, тепло, обслуговування, адміністративні витрати тощо). Інші вирази, що входять до формули: bx; cx^2; dx^3 – є вираженням вартості матеріалів, сировини, паливно-енергетичних ресурсів, праці і т.ін.

Наприклад, вартість сировини може бути пропорційна х, але вартість праці може частково залежати від більш високого степеня х, завдяки вартості додаткових годин праці, деяких моментів неефективності, які мають місце у великомасштабних операціях.

Функція $C(x)$ при маркетингових дослідженнях не може бути розглянута без функцій $p(x)$, $R(x)$, $P(x)$.

$p(x)$ – ціна одиниці продукції, яку виробник може встановити за умови продажу х одиниць продукції. Можна очікувати, що функція $p(x)$ як функція залежності ціни від попиту буде спадною.

При збуті х одиниць продукції за ціною одиниці продукції $p(x)$, загальний прибуток складатиме $R(x)= x*p(x)$, де $R(x)$ – функція доходу.

$R'(x)$ – маржинальна функція доходу є швидкістю зміни доходу в залежності від кількості одиниць продукції, що продається. Загальний прибуток при збуті х одиниць дорівнює $P(x)=R(x)-C(x)$, де $P(x)$ – функція прибутку.

Розглянемо застосування маржинальних функцій вартості, доходу та прибутку під час проведення маркетингових досліджень з метою отримання підприємством за певний проміжок часу максимально можливого доходу і прибутку.

Приклад. Підприємство пропонує оптовому покупцеві ціну 450 грн. за одиницю продукції за умови придбання 1000 одиниць продукції на тиждень. Дослідження, проведені службою маркетингу, стверджують, що при зниженні ціни кожної одиниці продукції на 10 грн., обсяг збуту зросте на 100 одиниць на тиждень. Визначити:
1) максимально можливу величину доходу підприємства за тиждень, обсяг продажів, що відповідає цьому доходу. Величину максимальної знижки (дисконту) в ціні для покупця з урахуванням отримання підприємством максимального доходу. Функцію ціни вважати лінійною.
2) максимально можливу величину прибутку на тиждень, обсягів продажів, що відповідає цьому прибутку. Величину максимального дисконту в ціні для покупця, з урахуванням отримання підприємством максимального прибутку. Функцію вартості вважати відомою: $C(x)=6800+150x$.

Складемо функцію ціни. $p(1000)=450$ за умовою задачі. Враховуючи результати дослідження служби маркетингу : $p(1100)=440$.

1. Припустивши, що функція ціни лінійна, запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$p-p_0=k(x-x_0);\ \Rightarrow k=\frac{p-p_0}{x-x_0}\ ;\ \Rightarrow k=\frac{440-450}{1100-1000}= -0{,}1;$$

$$p-450= -0{,}1(x-1000);\ \Rightarrow p(x)= -0{,}1x+550.$$

Отже, $p(x)= -0{,}1x+550$ – функція ціни одиниці продукції за умови, що підприємство продає x одиниць продукції.

Складемо функцію доходу:

$R(x)=x*p(x)=x(-0{,}1x+550)= -0{,}1x^2+550x$.

$R'(x)= -0{,}2x+550$; $-0{,}2x+550=0$; $\Rightarrow x=2750$.

Маємо: 2750 – кількість продажу одиниць продукції, що забезпечує отримання підприємством максимального доходу.

$p(2750)= -0{,}1*2750+550=275$ (грн.)

Отже, ціна одиниці продукції при збуту 2750 становить 275 грн.

450-275=175 грн. – дисконт підприємства покупцю в ціні за одиницю продукції, що забезпечує підприємству отримання максимального доходу.

$R(2750)=2750*275=756250$ (грн.)

756250 грн. – максимальний можливий дохід підприємства при об’ємі збуту 2750 одиниць за тиждень.

2. Знаючи функцію доходу $R(x)= -0{,}1x^2+550x$, функцію вартості $C(x)=68000+150x$, запишемо функцію прибутку:

$P(x)= R(x)-C(x)= -0{,}1x^2+550x-68000-150x=-0{,}1x^2+400x-68000$.

Досліджуємо цю функцію на екстремум:

$P'(x)= -0{,}2x+400$; $-0{,}2x+400=0 \Rightarrow x=2000$.

$P''(x)= -0{,}2<0 \Rightarrow$ $x=2000$ – точка максимуму

$P(2000)= -0{,}1*2000^2+400*2000-68000=332000$ (грн.)

Отже, 2000 – кількість одиниць продукції за якої підприємство отримає максимальний прибуток; 332000 грн. – максимальний можливий прибуток.

$p(2000)= -0{,}1*2000+550=350$ (грн.)

Якщо 350 грн. – ціна одиниці продукції, що забезпечує максимальний прибуток, то 450-350=100 грн. – величина дисконту в ціні за одиницю продукції з урахуванням отримання підприємством максимального прибутку [2].

Результати дослідження записуємо в таблицю.

Режим роботи підприємства	Об’єкти дослідження			
	Ціна одиниці продукції	Кількість збуту одиниць продукції за тиждень	Максимальний можливий дохід за тиждень	Максимальний можливий прибуток за тиждень
Звичайний	450	1000	450000	232000

Спрямований на отримання макс. доходу	275	2750	756250	275750
Спрямований на отримання макс. прибутку	350	2000	700000	332000

Застосування методів диференціального числення у проведеному дослідженні дає можливість вибрати найкращі умови режиму роботи підприємства.

Література

1. Дутка Г. Застосування диференціального числення в задах економічного змісту / Г. Дутка // Математика в школі. – 1999. – № 2. – С. 23–25.
2. Стасюк В. Використання похідної функції на прикладах розв’язання економічних задач / В. Стасюк, С. Григулич // Математика в школі. – 2008. – № 5. – С.39–41.