Ущаповська Олена, Котенко Олена
студентки V курсу, спеціальність «Математика і фізика»
Науковий керівник – ***Сверчевська І. А.****,*
кандидат педагогічних наук, доцент

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ЯК МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ

Початок XIX століття у математиці ознаменувався тим, що була побудована теорія комплексних чисел і комплексні числа посіли важливе місце в науці. Як виявилось, застосування комплексних чисел дозволяє зручно і компактно сформулювати багато математичних моделей, що застосовуються в математичній фізиці і в природничих науках. Зокрема, комплексні числа є досить актуальними і важливими в математиці. А саме, при розв'язуванні рівнянь n-го степеня, доведення тотожностей, також при розв'язуванні геометричних задач та задач з фізики.

Застосування комплексних чисел при розв'язанні практичних задач – це важливий аспект у технічному навчанні, підготовка майбутніх інженерів до вивчання теорії функції комплексної змінної у вузі, її зв'язків з теорією диференціальних рівнянь.

У XVI столітті у зв'язку з вивченням кубічних рівнянь виявилося необхідним добувати квадратні корені з від'ємних чисел. У формулі для розв'язування кубічних рівнянь виду $x^3 + px + q = 0$ є кубічні і квадратні корені : $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Ця формула безвідмовно діє у випадку , коли рівняння має один дійсний корінь ($x^3 + 3x - 4 = 0$) , а якщо воно має три дійсних кореня ($x^3 - 7x + 6 = 0$), то під знаком квадратного кореня з'являлося від'ємне число. Виходило , що шлях до цих коренів веде через неможливу операцію добування квадратного кореня з від'ємного числа.

Італійський алгебраїст Дж. Кардано в 1545 р. запропонував ввести числа нової природи. Потрібно тільки домовитися діяти над такими виразами за правилами звичайної алгебри і вважати що $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$. Кардано називав такі величини "чисто протилежними" і навіть "софістично протилежними", вважав їх марними і намагався їх не вживати.

Але вже в 1572 році вийшла книга італійського алгебраїста Р. Бомбеллі, в якій були встановлені перші правила арифметичних операцій над такими числами. Назва "уявні числа" увів в 1637 році французький математик і філософ Р. Декарт, а в 1777 році один з найбільших математиків XVIII століття- Л. Ейлер запропонував використовувати першу букву французького слова imaginaire (уявний) для позначення числа $\sqrt{-1}$ (уявної одиниці). Цей символ увійшов у загальне вживання завдяки К. Гауссу. Термін "комплексні числа" так само був введений Гауссом в 1831 році.

Наприкінці XVIII століття французький математик Ж. Лагранж зміг сказати , що математичний аналіз вже не ускладнюють уявні величини. За допомогою уявних чисел навчилися виражати розв’язки лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. Такі рівняння зустрічаються, наприклад, в теорії коливань матеріальної точки в середовищі, що чинить опір. Ще раніше швейцарський математик Я.Бернуллі застосовував комплексні числа для обчислення інтегралів.

Розглянемо деякі практичні застосування комплексних чисел в алгебрі, геометрії, фізиці.

Задача №1 [1, 204]

Довести: добуток двох чисел, кожне з яких є сумою квадратів двох цілих чисел, знову є сума квадратів двох цілих чисел.

Доведення. a, b, c, d, $m = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2$;

$m\cdot n = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a +$

$= ((ac - bd) + (ad + bc)i)((ac - bd) - (ad + bc)i) =$

. Доведено.

Приклад: $m = 1^2 + 3^2 = 10$, $n = 2^2 + 5^2 = 29$.

Розв’язання. $m\cdot n = 290 = (1\cdot 2 - 3\cdot 5)^2 + (1\cdot 5 + 3\cdot 2)^2 = 13^2 + 11^2$.

Задача № 2 [1, 205]

Знаючи

$\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}$ та $\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}$, довести, що $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\sin\frac{\pi}{12} == \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Доведення.

$$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}};$$

$$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\frac{(1+i)\cdot(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3} - i + \sqrt{3}\cdot i - i^2}{(\sqrt{3})^2 - i^2} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)}{3+1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Задача №3 [1, 206]

Вивести формули для $\cos 6\varphi$ *і* $\sin 6\varphi$.

Розв'язання.

$\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^6 = \cos^6\varphi + 6i\cos^5\varphi\sin\varphi - 15\cos^4\varphi\sin^2\varphi - 20i\cos^3\varphi\sin^3\varphi + 15\cos^2\varphi\sin^4\varphi + 6i\cos\varphi\sin^5\varphi - \sin^6\varphi/$

Звідки

$\cos 6\varphi = \cos^6\varphi - 15\cos^4\varphi\sin^2\varphi + 15\cos^2\varphi\sin^4\varphi - \sin^6\varphi,$

$\sin 6\varphi = 6\cos^5\varphi\sin\varphi - 20i\cos^3\varphi\sin^3\varphi + 6\cos\varphi\sin^5\varphi.$

Задача № 4 [2, 36]

Доведіть, що для точок Z_1 *і* Z_2 *кола радіуса* R *з центром в точці O справджується рівність* $z_2 - z_1 = |z_2 - z_1|ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, *де* z_2 *і* z_1 *– комплексні координати точок* Z_2 *і* Z_1 *відповідно,* $\alpha = \arg z_1$, $\beta = \arg z_2$, *причому 0.*

Розв’язання. Нехай $z_1 = Re^{i\alpha}$, $z_2 = Re^{i\beta}$, причому 0. Оскільки

$$\frac{z_2 - z_1}{ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \frac{Re^{i\beta} - Re^{i\alpha}}{ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \frac{R}{i}\left(e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) =$$

$$= \frac{R}{i}\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2} + i\sin\frac{\beta-\alpha}{2} - \cos\left((-)\frac{\beta-\alpha}{2}\right) - \right.\ i = 2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$|z_2 - z_1| = |Re^{i\beta} - Re^{i\alpha}| = |R($

$=|$

$$R\left(\left(\cos\beta - -\cos(\alpha) + i\left(\sin(\beta - \sin(\alpha)\right)\right| = \sqrt{R^2[((\cos\beta - \cos(\alpha))]^2 + (\sin\beta - \sin$$

$$= R\sqrt{2 - 2(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin(\alpha))} = R\sqrt{2\left(1 - \cos((\beta-\alpha))\right)} =$$

$$= R\sqrt{2\cdot 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}} = 2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$ то $\frac{z_2 - z_1}{ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = |z_2 - z_1|$ або $z_2 - z_1 = |z_2 - z_1| \cdot i \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, що і треба було довести.

Задача №5 [3, 1-8]

Нехай електричне коло змінного струму містить два ланцюги, що з’єднані паралельно. По них проходить струм $I_1(t) = 10\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ *і*

$I_2(t) = 6\sin\left(2t + \frac{4\pi}{3}\right)$. *За законом фізики загальний струм* $I(t)$ *визначають шляхом додавання* $I_1(t)$ *і* $I_2(t)$. *Знайти* $I(t)$.

Розв'язання. Гармонічним коливанням $I_1(t)$ і $I_2(t)$ ставимо у відповідність комплексні числа

$$z_1 = 10\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 10\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5 + 5\sqrt{3}i,$$

$$z_2 = 6\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 10\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 - 3\sqrt{3}i.$$

У результаті їх додавання маємо: $z_1 + z_2 = 2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

Тому за вказаною відповідністю $I(t) = 4\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Задача №6 [3, 1-8]

Під дією напруги $U = 220\sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{18}\right)$ *в колі проходить струм* $I = 10\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{18}\right)$. *Знайти активний і реактивний опори.*

Розв'язання. Комплексні напруга і струм мають вигляд

$$\tilde{U} = 220\left(\cos\left(\omega t + \frac{5\pi}{18}\right) + i\sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{18}\right)\right),$$

$$\dot{I} = 10\cos((\omega t - \pi/18) + i\sin((\omega t - \pi/18))).$$

Тоді

Z =

$$\frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{220\left(\cos\frac{5\pi}{18} + i\sin\frac{5\pi}{18}\right)}{10\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right)} = 22\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 11 + 11\sqrt{3}i.$$

Звідси R = 11(Ом); X = 11$\sqrt{3}$ (Ом).

Математика – це область людського знання, в якій вивчаються математичні моделі.

Побудова математичних моделей виступає засобом реалізації прикладної спрямованості навчання математики, посилює та збагачує фундаментальну математичному освіту в межах, що відведені основною школою.

Література

1. Фадєєв Д. К. Збірник задач з вищої алгебри / Фадєєв Д. К., Самінський І. С. – К. : Вища школа, 1971. – 315с.
2. Хмара Т. Застосування комплексних чисел до розв'язування геометричних задач / Тамара Хмара, Олександра Шаран. // Математика в школі. – 2004. – №8. – С. 32–40.
3. Бродський Я. Про електричний струм, похідну та комплексні числа / Яків Бродський, Анатолій Сліпенко // У світі математики. – 2002. – Вип. 1. – С. 1–8.