

Вербельчук Наталія,
студентка III курсу, напрям підготовки «Математика*».
Науковий керівник – **Королук О. М.,**
кандидат педагогічних наук, доцент

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В БІОЛОГІЇ

Сьогодні моделювання стало тим засобом, який дозволяє встановлювати глибокі і складні взаємозв'язки між теорією та експериментом. Одним із ефективних способів моделювання є математичне моделювання. Математичні моделі – це сукупність формул і рівнянь, які описують властивості досліджуваного об'єкта [1]. Серед таких моделей системи лінійних та нелінійних алгебраїчних рівнянь або нерівностей, диференціальні рівняння чи їх системи тощо.

Об'єкт дослідження в біології – це живий організм, який становить собою дуже складну систему. Моделі в біології застосовуються для моделювання біологічних структур, функцій і процесів на різних рівнях організації живого: молекулярному, субклітинному, клітинному, органно-системному, організмівому і біоценотичному [2].

Як приклад розглянемо математичну модель у біології «хижак – жертва» (модель Вольтера) [3].

Нехай на деякому просторі мешкають два види особин: жертви (зайці) та хижаки (лисиці). Жертви харчуються рослинністю, яка є завжди в достатній кількості (між ними відсутня внутрішньовидова боротьба), а хижаки можуть харчуватись лише жертвами (рис. 1).

Введемо наступні величини: x – кількість жертв; y – кількість хижаків на момент часу t .

Рівняння балансу між чисельністю народжених особин і тих, що загинули, матимуть вигляд:

1) жертви:
$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \delta x - \alpha xy,$$



Рис. 1. Харчові зв'язки між організмами описується за допомогою математичної моделі

де γ – коефіцієнт розмноження жертв; γx – швидкість розмноження жертв; δ – коефіцієнт природної загибелі жертв; δx – швидкість природної загибелі жертв; αxy – швидкість загибелі жертв у результаті зустріч з хижаками,

пропорційна кількості зустрічей, а значить добутку xu ; $\frac{dx}{dt}$ – швидкість зміни чисельності жертв.

2) *хижаки*: $\frac{dy}{dt} = \alpha xy - \beta y$, де αxy – швидкість розмноження хижаків, пропорційна числу зустрічей з жертвами; βy – швидкість природної загибелі хижаків; $\frac{dy}{dt}$ – швидкість зміни чисельності хижаків.

Отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \alpha xy; \\ \frac{dy}{dt} = \alpha xy - \beta y. \end{cases}$$

– це складна система нелінійних диференціальних рівнянь, яку в загальному вигляді аналітично розв’язати не можна.

Розглянемо випадок, коли $x = \text{const}$ та $y = \text{const}$,

тобто $\frac{dx}{dt} = 0$;

та $\frac{dy}{dt} = 0$.

$$x_{cm} = \frac{\beta}{\sigma}, \quad y_{cm} = \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Тоді розв’язки системи:

Отже, у цій системі можливий стаціонарний стан, а число особин хижаків і жертв в цьому стані залежить від коефіцієнтів загибелі, народження, зустрічей, тобто від внутрішніх параметрів системи.

В іншому випадку, при малих відхиленнях $u(t)$ від x_{cm} та $v(t)$ від y_{cm} , система рівнянь зводиться до диференціальних рівнянь другого порядку, що описують гармонічні коливання величин u та v :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \beta \varepsilon u(t) = 0; \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + \beta \varepsilon v(t) = 0. \end{cases}$$

Отже, чисельність особин жертв та хижаків при малих відхиленнях від стаціонарних значень:

$$x(t) = x_{cm} + U_{\max} \sin \sqrt{\varepsilon\beta} \cdot t,$$

$$y(t) = y_{cm} + V_{\max} \sin(\sqrt{\varepsilon\beta} \cdot t + \varphi_0).$$

Графічну інтерпретацію розв'язків представлено на рис. 2. та рис. 3.

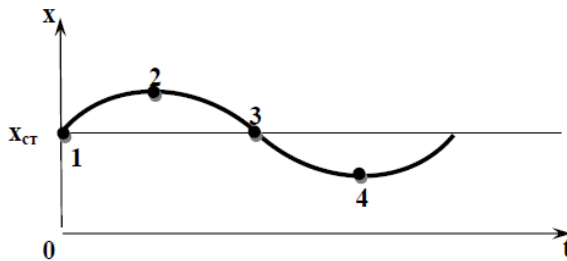


Рис. 2. Динаміка чисельності жертв x
хижаків y

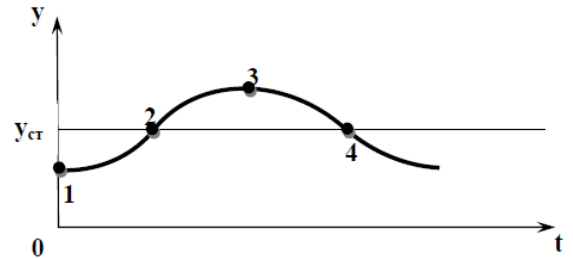


Рис. 3. Динаміка чисельності

після невеликого початкового відхилення від стаціонарного значення

Якщо виключити з рівняння для залежностей $x(t)$ та $y(t)$ час, то отримаємо фазову діаграму (фазовий портрет) системи. Для даного випадку – це еліпс (рис. 4).

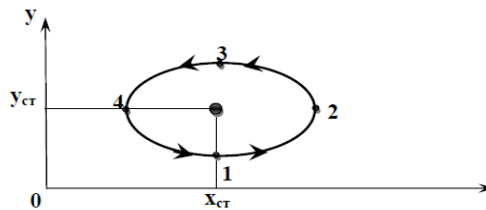


Рис. 4. Фазова діаграма системи «хижак жертва»

Інтерпретація отриманого результату. Початковий стані 1 – число хижаків в системі мінімальне, а число жертв стаціонарне. У таких умовах жертви мають можливість вільно розмножуватись, їх кількість збільшується, але приводить до покращення умов харчування хижаків, тому їх кількість теж збільшується. В момент часу, що відповідає точці 2, число хижаків досягає стандартного значення. З цього моменту число жертв вже не збільшується: хижаків уже досить багато і вони починають інтенсивно поїдати жертв. Число хижаків продовжує зростати; це відбувається до того моменту, коли число жертв не стане відповідати стандартному значенню (3). Потім їжі для всіх хижаків уже не буде вистачати і вже їх кількість буде поступово зменшуватися. Що призведе до повернення процесу до початкового стану (1).

Отже, така система є самоузгодженою: зміна числа одних особин тягне за собою неминучу зміну кількості інших, що в свою чергу сприяє зміні числа перших і т. д.

Литература

1. Введение в математическое моделирование : учеб. пособие / под ред. П. В. Трусова. – М. : Логос, 2004.
2. Молчанов А. М. Предисловие редактора. В кн. «Математическое моделирование биологических процессов» / А. М. Молчанов. – М. : Наука, 1979.
3. Самарский А. А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. / Самарский А. А., Михайлов А. П. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.