Данчук Юлія,
студентка V курсу, спеціальність «Математика та інформатика».
Науковий керівник – ***Дідківська Т. В.,***
кандидат фізико-математичних наук, доцент

АЛГЕБРАЇЧНІ ТОТОЖНОСТІ В МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧАХ

Ще в школі дітей знайомлять з такими поняттями як «тотожності» та «тотожно рівні вирази», але навіть після їх вивчення, не наголошують на тому, що алгебраїчні тотожності широко застосовуються в математичних задачах.

Геометричні задачі, задачі на знаходження сум, математичні фокуси – це далеко не повний перелік задач, у яких зустрічаються алгебраїчні тотожності.

Крім того, що деякі тотожності можуть значним чином спростити обчислення (формули скороченого множення; тотожності, на яких ґрунтуються способи швидкого множення), багато задач, які містять тотожності, можуть представляти інтерес для учнів, що, безумовно, є їх позитивною якістю.

Варто розглянути приклади задач, які містять алгебраїчні тотожності.

Приклад 1. Швидке піднесення до квадрату двоцифрових чисел, які закінчуються на 5.

Доведемо тотожність, знання якої дозволить швидко підносити до квадрату двоцифрові числа, які закінчуються на 5.

Якщо число десятків a, то все число можна зобразити так: 10a+5.

Піднесемо даний вираз до квадрату:

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = a \bullet (a+1) \bullet 100 + 25.$$

А це означає, що при розв’язуванні завдань можемо використовувати таку тотожність: $\overline{a5} = a \bullet (a+1) \bullet 100 + 25.$ Або $(10a+5)^2 = a \bullet (a+1) \bullet 100 + 25.$

Вираз $a \bullet (a+1)$ є добутком числа десятків на число, більше на одиницю. Помножити число на 100 і додати 25 — все одно, що приписати до числа 25.

Отже, з доведення даної тотожності випливає правило піднесення до квадрату двоцифрових чисел, які закінчуються на 5. Воно полягає в тому, що число десятків множать на число на одиницю більше і приписують до добутку 25 [1].

Продемонструємо застосування доведеної тотожності на конкретних числах:

1) $25^2 = 625$; 2) $85^2 = 7225$; 3)45^2=2025.

Далі розглянемо математичний фокус.

Приклад 2. Знаходження закресленої цифри числа.

Перетворимо тотожно вираз $100a + 10b + c - (a + b + c)$.

Маємо: $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)$.

Рівність $100a + 10b + c - (a + b + c) = 9(11a + b)$ є тотожністю, і на її основі ґрунтується математичний фокус – знаходження закресленої цифри числа.

Запропонуйте товаришеві задумати багатозначне число. Потім, нехай він знайде суму цифр цього числа і відніме її від задуманого числа. В числі, яке отрималося, нехай закреслить одну цифру (неважливо яку) і повідомить всі інші.

Можна негайно назвати закреслену цифру, навіть не побачивши задуманого числа і не знаючи, яку цифру було закреслено. Робиться це дуже просто: підшукується така цифра, яка разом із сумою повідомлених чисел, склала б найближче число, що ділиться на 9 без остачі. Так виходить тому: якщо від якогось числа відняти суму його цифр, то має залишитися число, яке ділиться на 9; по-іншому: сума цифр якого ділиться на 9.

Може статися так, що сума повідомлених цифр вже ділиться на 9. Це означає, що закреслена цифра 0 або 9. Потрібно так і відповісти: 0 або 9. [2, с. 56]

Продемонструємо, виконання даного математичного фокусу на конкретному прикладі:

Нехай задумане число – 847. За наведеним алгоритмом маємо:

$847 – (8 + 4 + 7) = 828$.

Нехай у числі 828 закреслили першу цифру 8, а повідомили – 8 і 2. Якщо додати 8 і 2, то до найближчого числа, яке націло ділиться на 9, тобто до 18, не вистачає – 8. Отже, закреслене число – 8.

Приклад 3. Потрібно перемножити два числа: 401 та 399.

Для того, щоб не виконувати множення у стовпчик, розглянемо таку тотожність: $(a + b) \cdot (a – b) = a^2 – b^2$.

Доведемо дану тотожність геометрично.

Маємо прямокутник зі сторонами $(a + b)$ та $(a – b)$ (рис.1). Його площа дорівнює $(a + b)\cdot(a – b)$. Розріжемо цей прямокутник на два прямокутники зі сторонами b і $(a – b)$ та a і $(a – b)$.

Звідси маємо

$S = S_1+S_2= b \cdot (a – b)+ a \cdot (a – b) = ba – b^2 + a^2 – ab = a^2 – b^2$.

Застосуємо дану тотожність для того, щоб перемножити 401 та 399: $\mathbf{401 \cdot 399 = (400 + 1) \cdot (400 – 1) = 400^2 – 1 = 15\,999.}$

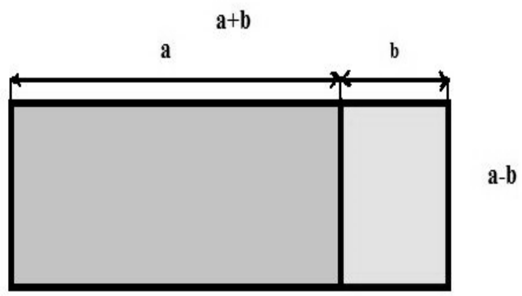

Рис. 1.

Результат одержано швидко та без зусиль, але це за умови, що відома така тотожність $(a + b) \cdot (a – b) = a^2 – b^2$, яка є формулою скороченого множення [1, с. 42].

Отже, знання деяких математичних тотожностей може бути не лише цікавим, але й корисним. Дійсно, чому б не здивувати своїх знайомих нескладними математичними фокусами, або ж для чого виконувати множення у стовпчик, коли можна зробити це набагато простіше, викоиставши лише просту математичну тотожність.

Література

1. Дороговцев А. Я. У світі математики / Дороговцев А. Я., Конфорович А. Г.– К. : Радянська школа, 1978. – Вип. 9. – 241 с.
2. Перельман Я. І. Жива математика / Перельман Я. І. – К. : Техніка, 1968. – 161 с.