ТОЧКИ, ПРЯМІ, ПЛОЩИНИ, ... , АКСІОМИ І ТЕОРЕМИ: ВВЕДЕННЯ В ЕВКЛІДОВУ ГЕОМЕТРІЮ

Іван ЛЕНЧУК – професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. Посилаючись на поняття математичної структури, доповнено істинно важливими аспектами, роз'яснено схему розбудови теорії евклідової геометрії на основі аксіоматики О. В. Погорєлова, розкрито науковий стиль подання системи аксіом, продемонстровано методичні особливості строго логічного наповнення підручника фактами.
Ключові слова. Математична структура, основні поняття, аксіоми, теореми, теорія геометрії, наочність, логіка міркувань.

Иван ЛЕНЧУК. Точки, прямые, плоскости, ... аксиомы и теоремы: введение в евклидовую геометрию.
Аннотация. Ссылаясь на понятие математической структуры, дополнено истинно важными аспектами, разъяснено схему построения теории евклидовой геометрии на основании аксиоматики А. В. Погорелова, раскрыты научный стиль представления системы аксиом, продемонстрированы особенности строго логического наполнения учебника фактами.
Ключевые слова. Математическая структура, основные понятия, аксиомы, теоремы, теория геометрии, наглядность, логика мышления.

Ivan LENCHUK. Points, Lines, Planes, ... Axioms And Theorems: An Instroduction To Euclidean Geometry.
Summary. Referring to the concept of a mathematical structure, complemented by truly important aspects, and explained the scheme of constructing a theory of Euclidean geometry based on axioms of A.V. Pogorelov, disclosed scientific presentation style system of axioms, demonstrated features of a strictly logical content of the textbook facts.
Keywords. Mathematical structure, basic concepts, axioms, theorems, the theory of geometry, visualization, logic thinking.

Небезпідставно на освітянській ниві сучасних ЗОШ однією з дисциплін математичного циклу є геометрія. Хоча державною програмою на повний курс геометрії передбачено менше тижневих годин, аніж на курс алгебри (більший обсяг фактичного матеріалу), проте провідною в цьому тандемі вважають геометрію. І це справедливо, адже винятково засобами найпершої з наук можна ефективно сформувати навички просторових уявлень й уяви, образного і логічного мислення учня. Алгебра, як не дивно, «послуговує» геометрії не лише в теоретичних, а й у практичних (прикладних) дослідженнях і їх реалізаціях. Геометрія ж поєднує три кардинально важливі складові становлення особистості, а саме: *логіку міркувань, наочне уявлення та вміле застосування усталених закономірностей до реальних речей*. Цей «трикутник», на думку професора Александрова О. Д., є ***«душею викладання геометрії»***. Прицьому уявлення від реальності розташовується дистанційно ближче, ніж логіка. Саме тому: «*Завдання викладання геометрії* – розвинути в тих, хто вчиться, відповідні три якості: ***просторове уявлення, практичне розуміння і логічне мислення***» [1, 57]. З огляду на неабияку значущість для особистісного розвитку дитини, *це* – ***глибинні освітянські завдання***. Над їх вирішенням і працює педагог-математик.

Із кінця XIX століття (передусім завдяки працям Д. Гільберта) в геометрії і в математиці в цілому набули широкого розвитку аксіоматичні теорії, в основі яких лежать теоретико-множинні поняття. Такі теорії приводять до *математичних структур*. Що ж таке математична структура?

Математична структура являє одну чи кілька множин M_1, M_2, ..., M_n, елементи якої довільної природи і перебувають у деяких відношеннях p_1, p_2, ..., p_t, що можуть мати яку завгодно конкретну суть і описуються властивостями α_1, α_2, ..., α_t, які виражаються в термінах теорії множин.

Множини M_1, M_2, ..., M_n називають *базовими множинами*, їх елементи – *основними об'єктами*, а відношення p_1, p_2, ..., p_t між множинами – *основними відношеннями* математичної структури. Основні об'єкти і основні відношення між ними називають *основними поняттями* математичної структури. Нарешті, властивості основних відношень α_1, α_2, ..., α_t називають *аксіомами*. Аксіома є твердженням, що приймається без доведення, завдячуючи безпосередній переконливості. Сукупність тверджень, які можна вивести із аксіом строго логічним шляхом, називають *теорією математичної структури*.

Якщо припустити, що для деякої системи аксіом **А** теорії Γ_A існують певні множини і такі відношення між елементами цих множин, що всі аксіоми **А** – суть істинні твердження, то очевидно, що логічні висновки, які випливають із аксіом, також будуть істинними для вказаних множин і відношень.

Сьогодні в учителя й учня є кілька фахово опрацьованих, якісно, яскраво оформлених, наповнених історичними фактами підручників (див., наприклад, [3, 4, 6]). За змістом вони написані у традиційному стилі – з дотриманням (тією чи іншою мірою) схеми підручника професора Погорєлова О. В., який цілком слушно називають класичним – уся суть у грамотно сформульованій і педагогічно виважено введеній аксіоматиці [7].

Однак, згідно з нині чинними програмами, шкільний курс геометрії не будується на аксіоматичній основі. Учнів лише ознайомлюють з поняттями «аксіома», «теорема», «означення», «доведення». Щоправда, у профільному 10 класі розглядають додатково «Аксіоматичний метод».

Чомусь у науково-педагогічному середовищі останнім часом панує думка, що відмова від логічно строгої дидактичної схеми побудови геометрії чи принаймні коротке (подрібнене) ознайомлення з аксіомами допоможе учню глибше зрозуміти дисципліну, додасть засобами геометрії розумових якостей у розвитку (адже **особистісний розвиток** дитини є прерогативою навчання). Проте, спілкуючись з учителями, відчуваєш супротив таким новаціям. У багатьох із них складається враження, що автори змагаються у спрощенні викладення матеріалу і, зокрема, у формулюванні та наочно-образному обґрунтуванні суті кожної з аксіом і диво-науки в цілому. Насправді ж, усі схожі потуги вдосконалення марні: ми на самому початку ознайомлення з найпершою із наук втрачаємо систему, ламаємо структуру саме дедуктивного методу побудови евклідової геометрії, яка ґрунтується на простій, уже продуманій і остаточно вдосконаленій О. В. Погорєловим аксіоматиці Евкліда – Гільберта. Все, що можна було спростити, геніальний вітчизняний вчений спростив. І ми певні, що цей факт не підлягає сумніву.

У шкільному поданні система аксіом дещо підсилена, порівняно з її категоричним, професійним тлумаченням. Це було свідомо зроблено автором із методичних міркувань, задля простоти викладення матеріалу. В чинних підручниках спрощено аксіоматику ще більше, зокрема в деяких із них відсутня аксіома «існування трикутника, що дорівнює даному». Але саме ця аксіома є однією зі стрижневих у *незалежній, несуперечливій* і *повній* системі аксіом О. В. Погорєлова (див. [8], глава XIV). Помітні й інші спрощення, які важко сприймають фахівці.

З іншого боку, з'ясовуючи властивості найпростіших геометричних фігур і відношень між ними, не зашкодить додати ліпших уявлень учням, розкрити логіку і науковий стиль у трактуванні системи аксіом, продемонструвати її структурний характер. Адже саме таких пояснень (через дефіцит місця) не зумів зробити автор. Поряд із цим, потрібно обов'язково зважати на те, що текстовий матеріал підручника є для вчителя лише «стислим конспектом, який слід читати між рядками»[1].

Ратуючи за науковість, переймаючись якісною компонентою навчання та розвитку, знаючи істинний стан справ зі знаннями, вміннями і навичками в евклідової геометрії учнів, **мету** статті ми вбачаємо винятково у роз'ясненні, доповненні окремих педагогічних і методичних аспектів представлення аксіоматики першонауки в інтерпретації професора Погорєлова О. В. і, в жодному разі, не в її видозміні, доопрацюванні чи вдосконаленні.

Ні для кого не може бути секретом той факт, що *об'єктом геометрії* є **фігура**, а *засобами навчання* – **малюнок** і **логіка** *людського розуму*. Геометрія ж як наука займається вивченням властивостей своїх об'єктів; проте не всіх наявних властивостей, а лише тих, які стосуються взаємного розміщення, форми, розмірів та певних властивостей, що не змінюються (інваріантні) під дією груп перетворень (у школі – групи перетворень подібності).

Отже, **основними об'єктами** (базою структури) **евклідової геометрії** є **точки**, **прямі** та **площини**, а *допоміжними – дійсні числа*. Чому? Мабуть, тому що основні об'єкти використовують як «будівельний матеріал», з них конструюють усі інші (похідні) фігури. Хоча точка, пряма й площина – фігури абстрактні (у природі таких не існує), проте кожен учень їх добре уявляє. Більше того, з ними неважко «поспілкуватися» зримо чи через чуття дотику: покладіть долоню на поверхню стола, і Ви, умовно кажучи, ввійдете в контакт із площиною; проведіть рукою по ребру стола і, Ви відчуєте пряму; доторкніться до «куточка» стола, і Ви отримаєте гострий (точковий) укол. Точку, пряму і площину можна «побачити» також на звичайній трикутній піраміді чи на звичайному кубі (змодельованих, наприклад, із дерева). Їх вершини є точками, ребра – частинами прямих, а грані – частинами

[1] З виступів О. В. Погорєлова на конференціях.

площин. Із причин нереальності існування, точка, пряма і площина не означаються – неможливо означити те, чого не можна сконструювати (реально або в уявленнях)! *Основні об'єкти геометрії* ще називають її *найпростішими фігурами*.

Ретельне **візуальне** опрацювання малюнків 3, 4, 6, 7, 9 підручника [7] (в діалоговому режимі: вчитель-учні) спонукає до природного введення понять перших двох **основних відношень**, у яких можуть бути розташовані точки і прямі на площині: **«лежати на»** («належати») і **«лежати між»**. Важливо наголосити, що такі основні відношення стосуються винятково основних об'єктів геометрії, а в розділі «Стереометрія» – ще й поверхонь тіл. Там теж потрібно вміти «брати» точку (лінію) на поверхні чи поза поверхнею тіла.

Ці ж основні відношення надають можливість ввести означення перших *похідних* фігур: **відрізка**, півпрямої (променя), **кута** і трикутника. Наступні (й останні) два з чотирьох **основних відношень**: **«довжина»** і **«градусна міра»** стосуються винятково похідних фігур – відрізків і кутів відповідно. І лише довжині відрізка і градусній мірі кута ставляться у відповідність певні додатні дійсні числа.

Основні відношення, як і основні об'єкти геометрії, ***не означаються***. Вони є природними в розумових уявленнях учня, а тому лише можуть бути виважено продемонстровані зображеннями на реальних малюнках та оцінені чисельно безпосередніми вимірюваннями лінійкою і транспортиром (див. [7], мал. 5, 8, 7, 18, 19, 24).

Зауважимо, що перелічені *основні об'єкти* і *основні відношення* між ними, взяті разом, якраз і є **основними поняттями** евклідової геометрії за О. В. Погорєловим.

Якщо уважно вчитатися у текст підручника, то можна помітити певну (удавану) суперечливість, на якій, усе ж таки, варто зупинитися. Тож на початку книжки в заголовку читаємо: «§1. Основні властивості найпростіших геометричних фігур». Далі маємо таке: «Основними властивостями належності точок і прямих на площині назвемо такі властивості: ...», «Основною властивістю розміщення точок на прямій назвемо таку властивість: ...», «Основними властивостями вимірювання відрізків назвемо такі властивості: ...», «Основною властивістю розміщення точок відносно прямої на площині назвемо таку властивість: ...», ..., «Основна властивість паралельних прямих: ...». За змістом викладеного матеріалу потрібно зробити важливий висновок: насправді автор з'ясовує основні властивості не основних об'єктів геометрії, а основних відношень, у яких вони можуть перебувати. Іншими словами, виходячи з несуперечливих фактів, досвіду людини, посилаючись до її практичних умінь і навичок установлюються і явно формулюються властивості введених відношень «лежати на», «лежати між», «довжина» і «градусна міра», об'єктами яких, у свою чергу, є точки, прямі та площини. Переконливо подані властивості основних відношень й є **аксіомами** в теорії розглядуваної геометричної структури.

Слово аксіома (від грецьк. *axióma*) означає «поважне», «авторитетне» твердження, що приймається, як зазначалося, без логічних доведень. Коли поняття «аксіома» вводити в обіг, не суть важливо. Все ж таки, як на нашу думку, більш доцільно це зробити відразу після формулювання першої аксіоми. Не факт, що таким дійством можна спантеличити учнів 7 класу.

Щодо змістової суті терміна **«теорема»** (від грецьк. *theórema* – розглядаю, обдумую), то його потрібно розуміти як твердження, що стосуються позиційних чи метричних властивостей геометричних фігур і яке доводять шляхом наочно-образних і логічних міркувань. У процесі доведення теорем дозволено користуватися тільки аксіомами і вже раніше доведеними теоремами. Жодними іншими властивостями фігур, навіть якщо вони здаються очевидними, користуватися заборонено.

Вельми привабливо й корисно у доведенні всякої теореми грамотно скористатися чітко й акуратно виконаним малюнком. У цьому, власне, полягає його стрижнева роль. Проте і тут не можна посилатися на властивості фігур, які хоча візуально й «видно» на малюнку, але вони ще не доведені.

О. В. Погорєлов був переконаний, що «... головне завдання викладання геометрії у школі – *навчити учня логічно розмірковувати, аргументувати свої твердження, доводити*. Дуже небагато з тих, хто закінчив школу будуть математиками, тим більше геометрами. Будуть і такі, які в їх практичній діяльності жодного разу не скористаються теоремою Піфагора. Однак навряд чи знайдеться хоча б один, котрому не доведеться розмірковувати, аналізувати, доводити» [9, *8*].

Надто важливим завданням учителя є, як відомо, зацікавити, вмотивувати учня геометрією. Чи важко це зреалізувати? Із досвіду бачимо, що дуже важко. На жаль, природна, всюдисуща геометрія[2] чомусь

[2] «Так усе ж навкруги – геометрія»! (Ле Корбюзьє, французький архітектор XX ст.)

виявилася для дітей «каменем спотикання» в сучасній школі. Ми певні, досягти позитивних результатів можна шляхом строгої геометризації і практичного втілення різних пропозицій диво-науки, їх максимально допустимого унаочнення якісними малюнками, сміливого введення в освітній процес конструктивно-генетичного методу навчання; шляхом розв'язування різнохарактерних і різного ступеня складності задач не тільки обчислювальних, а й задач на доведення, побудову і дослідження, в яких учень міг би виявити пошукову наполегливість, творчість, аналітичний характер мислення. Це потрібно розпочинати робити з найперших уроків, тобто з виваженого, достеменно зрозумілого учню введення *системи аксіом, яка*, як з'ясувалося, *є підвалиною чіткої геометричної структури.*

У підручнику О. В. Погорелова, завдяки вдало введеній системі аксіом, побудовано струнку геометричну теорію. До того ж аксіоми міри для відрізків і кутів дали змогу обминути досить складні в теоретичному плані питання вимірювання геометричних величин, а ввівши власну схему подання теорем усталеного традиціями курсу [5], автор зумів стисло, проте науково строго представити весь програмовий матеріал.

Продемонструвати логічні основи і методичні особливості підручника можна аналізуючи, наприклад, зміст другого і третього параграфів. У другому параграфі, крім чітко поданих означень і теорем, які стосуються суміжних і вертикальних кутів, наведено означення перпендикулярних прямих і перпендикуляра до прямої; доводиться теорема про те, що через точку прямої можна провести перпендикулярну до неї пряму і до того ж тільки одну; дається означення бісектриси кута. Третій параграф присвячено винятково доведенню трьох ознак рівності трикутників, адже вони, як відомо, є найважливішим засобом у наступних теоретичних викладках і під час розв'язування задач. Спочатку доводяться перші дві ознаки, де кожний крок у міркуваннях передбачає застосування тієї чи іншої аксіоми. Для доведення третьої ознаки, як з'ясувалося, лише аксіом недостатньо. Тому автор вводить у розгляд рівнобедрений трикутник; доводить властивість кутів і ознаку такого трикутника (пряму й обернену теореми); дає означення висоти, бісектриси і медіани будь-якого трикутника; доводить властивість медіани рівнобедреного трикутника і, на завершення, скориставшись аксіомами й уже отриманими фактами стосовно рівнобедреного трикутника, переконливо, ефектно і красиво доводить третю ознаку рівності трикутників.

Далі в певному порядку, на основі раніше обґрунтованих закономірностей, встановлюються властивості всього різновиду фігур евклідової геометрії. Прикладами розв'язаних задач закріплюються знання учнів, здобуваються усталені вміння та навички оперування геометричними фігурами, після кожного параграфа дається перелік змістових контрольних запитань, чим явно стверджується діяльнісний, розвивальний характер навчання.

Чи можна пред'явити хоча б якісь претензії до змістового наповнення підручника? Звичайно, можна. Як, власне, до будь-якої об'ємної і вельми непростої наукової праці. Й це стосується, в першу чергу, задач. Чимало принципово важливих геометричних фактів винесено в задачі – без наголосу на їх значущість; задачний матеріал невиразно структуровано за рівнями складності; помітно слабкою ланкою підручника є задачі на побудову і, в цілому, формально-логічний метод навчання превалює над конструктивно-генетичним; не акцентується увага на аналітико-синтетичних методах доведень; окремі доведення можна було б провести коректніше, а окремі – простіше і т. ін. Усе ж, за умов ретельного доопрацювання, всі недоліки піддаються усуненню. Тим паче, що першопричина такого стану речей об'єктивна (нестача місця, як уже наголошувалося вище).

Як результат можна констатувати, що системно структурована евклідова геометрія вміщує в собі такі складові:

• **основні поняття**, компонентами яких є *основні об'єкти* (найпростіші геометричні фігури) та *основні відношення* між ними;

• **аксіоми** – життєво переконливі властивості основних відношень, узяті безпосередньо з досвіду людини;

• **похідні об'єкти** (геометричні фігури), сконструйовані винятково з точок, прямих і площин;

• **теореми**, в обґрунтуваннях яких посилаються лише на твердження прийняті без доведень і раніше вже доведені істинні твердження;

• **задачі**, які розв'язуються шляхом наочно-образних і логічних міркувань із використанням лише *якісних* малюнків й *істинних* тверджень.

Окрім аксіом і теорем, у геометрії вирізняють **означення**. На переконання Г. П. Бевза, «***Означенням*** називається речення, в якому в стислій формі за допомогою вже відомих понять і їх властивостей розкривається зміст нового поняття» [2, *22*]. Або ж, як стверджувала З. І. Слєпкань, «***Означенням*** (або дефініцією) називають речення, в якому в мовній або символічній формі перелічуються загальні істотні властивості, тобто розкривається зміст поняття» [11, *75*].

Специфіка дисципліни «Геометрія» потребує розрізнення *дескриптивних* (неявних) і *конструктивних* (побудовних) означень. Якот, умову будь-якої задачі на побудову треба вважати дескриптивним означенням шуканої фігури, а алгоритм її розв'язання, сконструйований учнем у результаті грамотно проведеного аналізу умови, – конструктивним означенням цієї ж фігури. В такій ситуації, як правило, візуально-покрокова реалізація конструктивного означення (етап побудови) здійснюються графічно.

У підсумку викладок зауважимо: все, про що йшлося вище, потрібно сприймати як зумисне акцентування уваги вчителя на розумінні структурних засад логічно вивіреної реалізації ідеї дедуктивної побудови геометричної теорії та, у зв'язку з цим, як наболілу, злободенну потребу формування професійних педагогічних якостей *цілеспрямованого навчання учнів* свідомому виокремленню геометричних форм і відношень, доказовому з'ясуванню фактів не лише під час доведення теорем і розв'язуванні різнорівневих задач (у тому числі, практичного та прикладного характеру), а й у побуті, науці й техніці, у предметах та явищах навколишньої дійсності.

У нас немає жодних сумнівів, що строгістю викладення окремих фактів геометрії, її структурним принципом розбудови не варто нехтувати.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. О геометрии / А. Д. Александров. // Математика в школе. – 1980. – №3. – С. 56 –62.
2. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навчальний посібник для студентів педінститутів. – 3-тє видання, перероблене і доповнене / Г. П. Бевз. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
3. Бевз Г. П. Геометрія: Підручник для 7 – 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів – / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К.: Вежа, 2001. – 272 с.
4. Бурда М. І. Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів – / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К.: Зодіак-ЕКО, 2007. – 208 с.
5. Киселёв А. П. Геометрия / А. П. Киселёв. Под ред. Н. А. Глаголева. – М.: Физматлит, 2004. – 328 с.
6. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підруч. для 7 кл. – / А. Г. Мерзляк, В. Р. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2008. – 201 с.
7. Погорєлов О. В. Геометрія: Підруч. для 7 – 9 кл. серед. шк. – / О. В. Погорєлов. – К.: Освіта, 1998. – 224 с.
8. Погорелов А. В. Геометрия: Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика» – / А. В. Погорелов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 282 с.
9. Погорелов А. В. Элементарная геометрия – / А. В. Погорелов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1977. – 280 с.
10. Розенталь И.Л. Геометрия, динамика, Вселенная – / И. Л. Розенталь, И. В. Архангельская. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 200 с.
11. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів математичних спеціальностей ВПНЗ – / З. І. Слєпкань. – К.: Вища шк.., 2006. – 584 с.

ПОРТРЕТ НА ОБЛАДИНЦІ

Куніхіко Кодайра (16 березня 1915 — 26 липня 1997) — японський математик, відомий видатними роботами в алгебраїчній геометрії і теорії комплексних многовидів, засновник японської школи алгебраїчної геометрії. У 1954 р. він став першим японцем, який отримав премію Філдса.

Народився Кодайра Куніхіко в Токіо. У1938 р. закінчив математичний факультет, а у 1942 р. – фізичний факультет Токійського університету. У 1949 р. захистив дисертацію на тему «Гармонійні поля у ріманових многовидах». Із 1944 р. займався криптографією і одночасно утримував академічну посаду в Токіо.

У 1949 році за запрошенням Германа Вейля він вирушив у Прінстон – в Інститут перспективних досліджень. У цей час основи теорії Ходжа, якими він зацікавився ще під час війни, були приведені у відповідність із сучасною технікою теорії операторів. Кодайра захопився використанням відкритих інструментів до алгебраїчної геометрії, додавши теорію пучків щойно вона стала доступною. На другому етапі досліджень Кодайра написав великий цикл робіт у співпраці з Д. К. Спенсером, створивши теорію деформацій комплексних структур на многовидах. У третій період своєї роботи (приблизно з 1960 року), Кодайра знову працює над класифікацією алгебраїчних поверхонь з точки зору біраціональної геометрії і теорії комплексних многовидів . Кодайра залишив Інститут перспективних досліджень у 1961 році, і деякий час пропрацював як голова Університету Джона Хопкінса і Стенфордського університету. У 1967 році він повернувся до Токійського університету. У 1984 р. його було нагороджено премією Вольфа.

Помер Куніхіко Кодайра в Кофу 26 липня 1997 року.

Джерело: Вікіпедія