

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Лінії другого порядку зустрічаються в явищах навколишнього світу: по еліпсу рухаються планети [Сонячної системи](#), по гіперболі або параболі – [комети](#). [Траєкторія](#) руху тіла, кинутого під кутом до [горизонту](#), є параболою; космічні кораблі, ракети, залежно від наданої їм швидкості, рухаються по колу, еліпсу, параболі чи гіперболі.

Уперше криві другого порядку вивчав учень Платона. Його робота була така: беручи дві пересічні прямі й крутити їх навколо бісектриси кута, ними освіченого, вийде конусна поверхня. Якщо ж перетнути цю поверхню площиною, то в перерізі одержують різні геометричні фігури: еліпс, парабола, гіпербола та ін.

Але ці наукові знання застосовуються лише XVII, коли всім відомо, що планети рухаються по еліптичним траєкторіям, а гарматне ядро летить по параболічній траєкторії. Ще пізніше став відомий такий факт, якщо надати тілу першу космічну швидкість, воно рухатиметься навкруг навколо Землі, зі збільшенням цієї швидкості – по еліпсу, а, по досягненні другий космічної швидкості тіло за параболою залишить поле тяжіння Землі.

Прикладом плоских закономірних кривих є алгебраїчні криві другого порядку: коло, еліпс, парабола, гіпербола. Аналітично порядок кривої визначається ступенем рівняння, а графічно – числом точок перетинання даної кривої з довільною прямою лінією.

Наприклад, із кожною з перерахованих кривих пряма перетинається максимум у двох точках.

Найбільш докладно властивості кривих другого порядку вивчаються аналітичною геометрією. У нарисній геометрії ці криві більш відомі під загальною назвою “конічні перерізи”, оскільки можуть бути отримані при перетині поверхні конуса обертання площиною.

Більш детально розглянемо застосування кривих другого порядку в економіці.

Задача №1. Два однотипних підприємства A та B виробляють продукцію з однією і тією ж оптовою відпускнуою ціною m за один виріб. Однак автопарк, що обслуговує підприємство A , оснащений новішими та потужнішими вантажними автомобілями. Тому транспортні витрати на перевезення одного виробу складають за 1 км: для підприємства A – 10 грош. од., а для підприємства B – 5-20 грош. од. Відстань між підприємствами 300 км. Як територіально має бути поділений ринок збуту між двома підприємствами для того, щоб витрати споживача на відвантаження виробів та їх транспортування були мінімальними?

Розв'язання. Позначимо через S_1 та S_2 відстані до ринку від пунктів A та B відповідно.

Тоді витрати споживачів складуть $F(A)=m+10 S_1$, $F(B)=m+20 S_2$.

Знайдемо множину точок, для яких $S_1=2S_2$, тобто ті випадки розміщення ринку, коли $f(A) = f(B)$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{(x^2 + y^2)}; S_2 = \sqrt{((300 - x)^2 + y^2)}; \\ \sqrt{(x^2 + y^2)} &= 2 \sqrt{((300 - x)^2 + y^2)}; \\ x^2 + y^2 &= 360000 - 2400x + 4x^2 + 4y^2; \\ (x - 400)^2 + y^2 &= 200^2. \end{aligned}$$

Це коло. Таким чином, для споживача всередині кола вигідніше купувати у пункті B , поза колом – у пункті A , на колі – однаково вигідно.

Задача №2. Нехай у момент часу $t = 0$ почалося виробництво певного типу машин, що раніше не вироблялися. Припустимо, що їхній випуск відбувається рівномірно за часом, річний обсяг продукції складає 1 млн грош. од., а повний термін експлуатації машин дорівнює 10 рокам. Визначити вартість машинного парку (за винятком суми зношеності) на кінець 1-го року, припускаючи, що $t \in [0, 10]$.

Розв'язання. Позначимо шукану вартість через y . Завдання полягає в тому, щоб знайти $y = f(t)$. Вартість машинного парку на кінець 1-го року без урахування зносу складає $t \cdot 10^6$, але фактично вартість машинного парку буде меншою внаслідок фізичного та морального зносу. Враховуючи, що машини були введені у виробництво не одночасно, будемо вважати, що середній вік машини складає 0,5 t . Річне зношення машини дорівнює 0,1 її вартості. Тому в t -му році вартість зношення машинного парку буде: $5 \cdot 10^4 t^2$.

Таким чином, у t -му році фактична вартість буде становити:

$$y = 10^6 t - 5 \cdot 10^4 t^2,$$

тобто функція залежності вартості машин від часу є квадратичною, а її графіком є парабола.

Отже, розгляд особливостей використання кривих другого порядку в задачах, дозволив визначити, що криві другого порядку набули широкого застосування в різних галузях.

Література

1. Корн Р. Криві другого порядку (конічні перерізу) / Корн Р., Корн Т. // Довідник з математики. – 4-те видання. – М. : Наука, 1978. – С. 64–69.
2. Корн Р. Характеристическая квадратична форма і характеристичне рівняння / Корн Р., Корн Т. // Довідник з математики. – [4-те видання]. – М. : Наука, 1978. – С. 64.
3. Ільїн В. А. Аналітична геометрія / В.А. Ільїн, Є.Г. Позняк. – М. : "Наука", 1988.