ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Параметричні рівняння ліній другого порядку, тобто такі, за допомогою яких декартові координати точок лінії виражаються як функції від змінного параметра t, можна складати по-різному.

Справді, щоб скласти параметричні рівняння лінії, досить подати одну із змінних, наприклад x, як довільну функцію від параметра t, а саме: $x = \varphi(t)$, а потім, підставляючи $\varphi(t)$ замість x у рівняння лінії, розв’язати його відносно y. Тоді дістанемо вираз для y як функції від t: $y = \psi(t)$. Сукупність рівнянь:

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t)$$

можна розглядати як параметричні рівняння лінії.

Найважливіше значення мають параметричні рівняння ліній другого порядку, безпосередньо пов’язані з їх побудовою по точкам. Виведемо цірівняння для еліпса, гіперболи і параболи. Нехай задано еліпс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad .$$

Припустимо, що $a > b$. Опишемо два концентричні кола радіусів a і b з центрами в початку координат. Проведемо через початок координат довільний промінь. Нехай він перетинає більше коло в точці A, а менше − у точці B. Проведемо через A пряму, паралельну до осі OY, а через B − пряму, паралельну до осі OX. Точку їх перетину позначимо через P. Доведемо, що точка P лежить на еліпсі. Позначимо кут нахилу променя OA до осі OX через φ, а координати точки P − через x, y. Отже, з ΔOAA_1 (рис. 102) маємо: $x = a \cos\varphi$. З ΔOBB_1 $BB_1 = b \sin\varphi$. Але $BB_1 = PA_1 = y$. Отже, $y = b \sin \varphi$.

Підставляючи ці значення x, y у рівняння еліпса, переконаємося, що вони його задовольняють при всіх значеннях φ. Отже,

$$x = a \cos \varphi,$$
$$y = b \sin \varphi$$

є параметричними рівняннями еліпса.

Для здійснення побудови еліпса по точкам досить знати значення a і b для еліпса.

Нехай тепер задано гіперболу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Знову з початку координат, як із центра, опишемо два довільних кола радіусів a і b. Нехай для конкретності Δa < b.

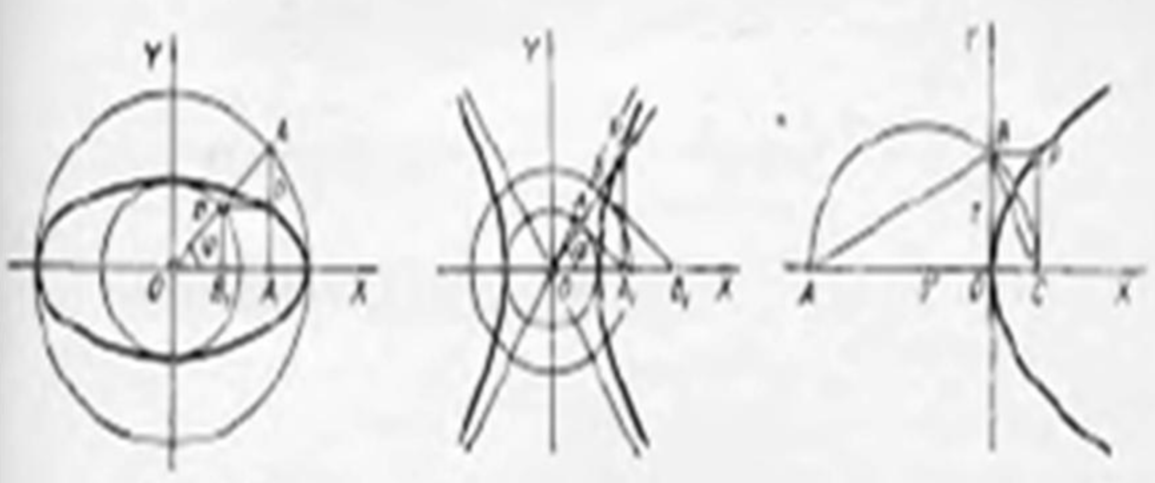

Рис. 102 Рис. 103 Рис. 104

Проведемо через початок координат довільний промінь і позначимо точки його перетину з колами A і B, а кут нахилу до осі OX − A_1. Через точки A і B проведемо дотичні до кіл і позначимо точки їх перетину з віссю OX як A_1 і B_1 (рис. 103). З точки A_1 проведемо перпендикуляр до осі OX AA_1 = B_1B - b tg φ. Покажемо, що точка P (x, y) належить гіперболі.

Справді, з $\Delta O AA_1$ маємо $x=OA_1=\dfrac{a}{\cos\varphi}$, $y=b$ tg φ за побудовою. Легко бачити, що ці значення x, y задовольняють рівняння гіперболи при довільному φ. Отже, рівняння:

$$x=OA_1=\frac{a}{\cos\varphi},$$

$$y=b\ \mathrm{tg}\ \varphi$$

є параметричними рівняннями гіперболи. Для побудови гіперболи по точках досить знати їх параметри a і b.

Нарешті, нехай задано параболу $y^2 = 2px$.

Візьмемо на осі OX точку A (− 2p, 0), а на осі OY − довільну точку B (0, t). Через точки A і B проводимо коло з центром на осі OX. Позначимо через C другу точку перетину кола з віссю OX. В точці C встановимо перпендикуляр

CP = OB = t. Покажемо, що точка P (x, y) належить параболі. З Δ ABC (рис. 104) маємо:

$t^2 = 2p \cdot$ OC, де OC = x; отже, $x = \frac{t^2}{2p}$ і y = t за побудовою. Легко побачити, що координати точки P (x, y) задовольняють рівняння параболи при довільному t. Отже,

$$x = \frac{t^2}{2p},$$

$$y = t$$

є параметричні рівняння параболи. Для побудови її по точкам досить знати параметр p.

Література

1. В.П. Білоусова. Аналітична геометрія / В.П. Білоусова, І.Г. Ільїн, О.П. Сергунова, В.М. Котлова. – К. : Вища шк., 1973. – 382 с.