Форма N Н-9.02

Міністерство освіти і науки України

Житомирський державний університет імені Івана Франка

Фізико-математичний факультет

Освітньо-кваліфікаційний рівень «бакалавр»

ДИПЛОМНА РОБОТА

Компентентнісний підхід до вивчення елементів сферичної геометрії

Виконала: студентка 42 групи,
напряму підготовки: 6.040201
Математика*, денного відділення
Мандро Анна Несторівна

Керівник: доцент кафедри алгебри та
геометрії, кандидат педагогічних наук
Чемерис Ольга Анатоліївна

м. Житомир – 2015 рік

ЗМІСТ

ВСТУП

У вищих навчальних закладах математика є одним із основних навчальних предметів, який забезпечує вивчення інших дисциплін і знаходить досить широке застосування на практиці. Специфічна роль у навчальній та практичній діяльності відведена вивчення геометричного матеріалу. Знання з геометрії дуже важливі, оскільки на сучасному етапі розвитку суспільства для фахівців багатьох спеціальностей визначним критерієм їх професіоналізму є певний рівень розвитку просторових уявлень, логічного мислення, становлення яких забезпечує саме курс геометрії. Крім того, вивчення властивостей геометричних тіл у просторі, зв'язків між ними формує науковий світогляд студентів, сприяє розвитку, цілеспрямованості та вміння логічно й аргументовано відстоювати свою точку зору.

Отже, геометрія забезпечує широкі можливості для розвитку логічної культури мислення, просторових уявлень, уяви, пам'яті, графічної культури, пізнавальної самостійності, творчості тощо.

Розвиток просторового мислення, в тому числі розвиток просторових уявлень та уяви, повинен бути одним із найважливіших компонентів навчання геометрії. Логічне мислення потрібне не лише математику, але й лінгвісту, психологу, соціологу, представнику природознавчих та технічних наук. Завдяки цьому мисленню формується усвідомлене ставлення до процесу міркування, вміння правильно будувати доведення, спростовувати, проводити аналоги, висувати гіпотези, знаходити та усувати помилки у своїх і чужих міркуваннях.

У дипломній роботі я розглядала теоретичний матеріал у системі дистанційного навчання . Дистанційне навчання – це нова, специфічна форма навчання, дещо відмінна від звичних форм очного або заочного навчання. Вона передбачає інші засоби, методи, організаційні форми навчання, іншу форму взаємодії вчителя та учнів, учнів між собою. Разом з тим як будь-яка форма навчання, будь-яка система навчання вона має той же компонентний склад: цілі, зумовлені соціальним замовленням для всіх форм навчання; зміст, також багато в чому певний діючими програмами для конкретного типу навчального закладу, методи, організаційні форми, засоби навчання. Останні три компоненти в дистанційній формі навчання обумовлені специфікою використовуваної технологічної основи (наприклад, тільки комп'ютерних телекомунікацій, комп'ютерних телекомунікацій в комплексі з друкованими засобами, компакт-дисками, так званої кейс-технологією, тощо).
За допомогою цього педагогічного засобу я у своїй дипломній роботі продемонструвала створення дистанційного курсу для вивчення елементів сферичної геометрії.

Актуальність теми:

1) Як і геометрія Евкліда, сферична геометрія виникла з практичних потреб, в першу чергу завдань астрономії. Ці знання були необхідні, наприклад, мандрівникам та мореплавцям, які орієнтувалися за зірками. А оскільки при астрономічних спостереженнях зручно вважати, що і Сонце, і Місяць, і зірки рухаються по уявній "небесній сфері", то природно, то природно, що для вивчення їх руху були потрібні знання про геометрію сфери.

- У даний час сферична геометрія особливо широке застосування знаходить у геодезії (науці про форми та розміри Землі).
- Дана тема може бути використана вчителями при проведенні факультативних занять для підвищення інтересу до геометрії.
- Сферична геометрія широко застосовується у навігації:

а) Зокрема, описує спосіб знаходження найкоротшої відстані між двома пунктами вздовж земної поверхні, якщо є їх географічні координати;

б) Визначає початкового курсу корабля при русі з одного пункту в інший, якщо відомі географічні координати цих пунктів.

в) Також використовується в картографії (зокрема при побудові картографічних проекцій).

2) Актуальність використання дистанційного навчання полягає в тому, що результати суспільного прогресу, раніше зосереджені в сфері технологій сьогодні концентруються в інформаційній сфері. Настала ера інформатики. Етап її розвитку в даний момент можна характеризувати як телекомунікаційний (область спілкування, інформації та знань). Виходячи з того, що професійні знання старіють дуже швидко, необхідно їх постійне вдосконалення. Дистанційну форму навчання дає сьогодні можливість створення систем масового безперервного самонавчання, загального обміну інформацією, незалежно від тимчасових і просторових поясів. Крім того, системи дистанційної освіти дають рівні можливості всім людям незалежно від соціального стану (школярам, студентам, цивільним і військовим, безробітними тощо) в будь-яких районах країни і за кордоном реалізувати права людини на освіту і отримання інформації. Саме ця система може найбільш адекватно і гнучко реагувати на потреби суспільства і забезпечити реалізацію конституційного права на освіту кожного громадянина країни. Виходячи з названих вище факторів можна зробити висновок, що дистанційне навчання увійде в 21 століття як найефективніша система підготовки та безперервної підтримки високого кваліфікаційного рівня фахівців.

Об'єкт дослідження:

Об'єктом дослідження є основні поняття сферичної геометрії.

Предмет дослідження:

Предметом дослідження є застосування відповідних понять сферичної геометрії для курсу з дистанційним навчанням.

Мета дослідження :

Мета полягає у тому, щоб за допомогою доступних джерел та наукової літератури продемонструвати вивчення елементів сферичної геометрії та геометрії на площині використовуючи педагогічний програмний засіб дистанційного навчання.

Завдання дослідження:

1. Розглянути основні поняття сферичної геометрії та, зокрема, сферичної тригонометрії.
2. Установити певні відповідності між сферичною геометрією та планіметрією.
3. Розглянути деякі задачі, пов’язані із сферичною геометрією, які мають застосування у геодезії.
4. Продемонструвати вивчення елементів сферичної геометрії за допомогою педагогічного програмного засобу для дистанційного навчання “easygenerator”.

РОЗДІЛ І. ОСНОВИ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО СФЕРИЧНІ ТРИКУТНИКИ

1.1. Основні поняття сферичної геометрії. Відстань між двома точками на сфері

Основні поняття сферичної геометрії

Означення 1:Сферою називається фігура ,яка складається з усіх точок простору, рівновіддалених від даної точки. Ця точка називається центром сфери. Відстань від точки сфери до її центра називаються радіусом сфери.

Відрізки, які сполучають дві точки сфери і проходять через центр, називаються діаметрами, а кінці діаметра – діаметрально протилежними точками. Фігура називається сферичною, якщо всі її точки лежать на одній і тій самій сфері.

Сферична геометрія вивчає геометричні властивості фігур, розміщених на сфері. Основними поняттями сферичної геометрії є поняття точки і великого кола сфери. Позначимо точки літерами A, B, C, …, а великі кола і їх частини літерами a, b, c, … . Сферичну поверхню з центром O і радіусом R позначатимемо (O, R), або сфера O.

Є ряд тверджень, що лежать в сфері геометричної геометрії:

1. Переріз сфери будь-якою площиною є колом.

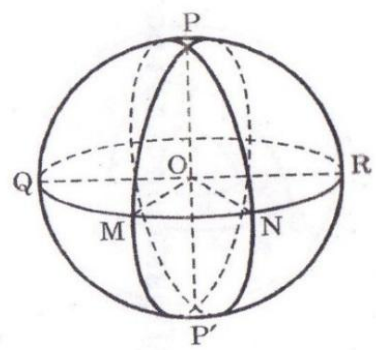
Площина, що проходить через центр сфери, називається діаметральною площиною, а лінія його перетину зі сферою – великим колом. Великі кола сфери ділять її на дві рівні частини. Площина великого кола є площиною симетрії сфери, а центр сфери – її центром симетрії.

2. Через дві не діаметрально протилежні точки сфери можна провести велике коло, і притому тільки одне. Два великих кола сфери перетинаються у двох точках. Взагалі два будь-які кола, що лежать на одній і тій самій сфері можуть перетинатись не більш як у двох точках, а саме в тих точках, де лінія перетину їх площини перетинає сферу.

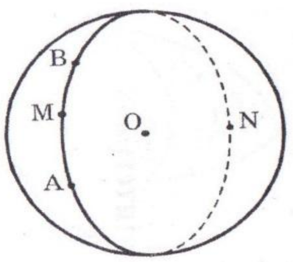
Відстань між двома точками на сфері

Важливим є поняття про найкоротшу відстань між двома точками на сфері. У геометрії Евкліда найкоротшою відстанню між двома точками є відрізок прямої, що сполучає ці точки. На сфері найкоротшою відстанню між точками є дуга великого кола , що проходить через ці точки.

Означення 2:Довжина найкоротшої лінії, що сполучає дві точки A і B на сфері, називається сферичною відстанню між точками A і B.



Мал. 2



Мал. 1

Теорема 1: Сферичною відстанню між двома точками на сфері є дуга великого кола, менша від 180□. Не приводячи доведення цієї теореми, відзначимо, що дві точки A і B на великому колі визначають дві дуги, з яких одна – AMB менша 180□, а друга більша 180□ (мал.1). Тому вказівка в теоремі, що розглядають одну з цих дуг (меншу 180□) є суттєвою.

Введемо поняття полюса і поляри, які на далі часто використовуються у сферичній геометрії.

Означення 3: Діаметр,перпендикулярний до площини якого - небудь великого кола сфери, перетинає її у двох точках P і P̀, які називаються полюсами цього кола або його дуги (мал. 2). Велике коло QMR називається геометричним екватором, або полярою точок P і P̀. Неважко переконатись у справедливості такої теореми.

Теорема 2: Усі точки поляри рівновіддалені від свого полюса на сферичну відстань, яка дорівнює 90 □.

Означення 4: Кутом на сфері називається фігура, утворена деякою точкою (наприклад, P) і двома півколами (наприклад, PMP` і PNP`), спільним кінцем яких є ця точка; точка P називається вершиною кута,півкола-його сторонами. Позначатимемо сферичний кут, як і на евклідовій площині, через

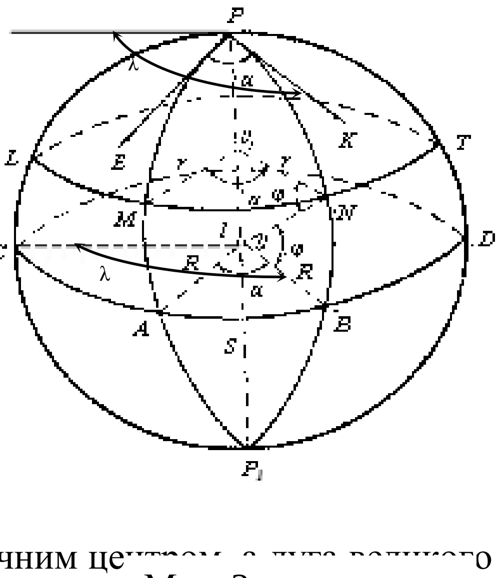
∠ MPN (мал. 2). Сферичний ∠MPN вимірюється дугою MN, що лежить між його сторонами , для якої вершина кута (точка P) є полюсом.

1.2.Точки та дуги на поверхні сфери. Сферичний двокутник. Сферичний трикутник та його елементи

Найпростіші фігури на сферичній поверхні – точки і дуги великих та малих кіл.

При перетині сфери площиною, що проходить через її центр, утворюється велике коло $CAB Д$(мал.3). Площини, що не проходять через центр сфери, утворюють малі кола типу $LMNT$. Діаметр PP_1, що проходить через центр великого кола перпендикулярно до його площини, перетинає поверхню сфери у двох точках P та P_1. Ці точки називаються полюсами цього великого кола (в даному випадку кола $CAB Д$). Коло $CAB Д$ по відношенню до точок P та P_1 називається полярою. Менша дуга AB великого кола визначає *сферичну* (*найкоротшу*) *відстань* між точками A та B на поверхні сфери. Цю дугу називають *геодезичною лінією* або *ортодромією*. Усі точки великого кола $CAB Д$ стоять від полюсів P та P_1 на 90□.

Площини великих кіл $PLCP_1 ДТ$, $PMAP_1$ та $PNBP_1$, що проходять через точки P та P_1, перпендикулярні до площини $CAB Д$.



Мал. 3

У разі малого кола $LMNT$, площина якого перпендикулярна діаметрові PP_1, точка P називається сферичним центром, а дуга великого кола PM – сферичним радіусом малого кола $LMNT$.

Місцезнаходження точки на поверхні сфери може бути визначено за допомогою так званої географічної сферичної системи координат. Географічна сферична система координат задається двома взаємно перпендикулярними великими колами $CAВД$ та $PLCP_1 ДТ$, коло $CAВД$ називається *екватором*, а півколо $PLCP_1$ − початковим *меридіаном*. Координатна сітка цієї системи утворюється паралелями – колами малих кругів, що паралельні екватору, та меридіанами – півколами великих кругів, що перпендикулярні до екватора. Кожний меридіан з'єднує північний P та південний P_1 полюси.

Місцезнаходження довільної точки N на сфері визначається двома координатами (φ,λ), де φ − широта та λ − довгота. Широта φ вимірюється сферичною відстанню $\varphi = BN$ вподовж меридіана від екватора до відповідної паралелі $LMNT$ (на північ, або південь від 0° до 90°). Довгота λ вимірюється кутом $\lambda = CPB$ між початковим меридіаном $PLCP_1$ та відповідним меридіаном $PNBP_1$ або відстанню $\lambda = CB$ вподовж екватора від початкового меридіану до відповідного меридіану $PNBP_1$ (на схід чи захід від 0° до 180°).

Величина дуги великого кола визначається центральним кутом α, що утворюється радіусами сфери OA та OB. Кут α є лінійним кутом двогранного кута, що утворюється площинами великих півкругів PAP_1 та PBP_1.

Зв'язок кутової (градусної), радіанної та лінійної міри дуги великого кола встановлюється за формулою

$$S = \alpha\, R = \frac{\alpha^\circ}{\rho^\circ} R, \qquad (1)$$

де S, α, α° − лінійна, радіанна та кутова міра дуги великого кола; R − радіус сфери; ρ° − число кутових одиниць в радіані, ρ° = 57°, 2957795…

З мал. №3 видно, що радіус $r = O_1N$ малого кола $LMNT$ дорівнює

$$r = R\cos\varphi \qquad (2)$$

Довжина дуги $\ell = MN$ малого кола $LMNT$ обчислюється за формулою

$$l = \alpha\, r = \alpha\, R\cos\varphi = S\cos\varphi \qquad (3)$$

Кут між дугами великих півкіл PAP_1 та PBP_1 називається сферичним кутом. Цей кут визначається кутом між дотичними EP та KP до цих дуг. Неважко довести, що $\angle EPK = \alpha$, тому що $EP \perp PP_1$ та $KP \perp PP_1$.

Для двох довільних точок M_1 та M_2 на поверхні сфери азимутом точки M_2 по відношенню до точки M_1 називається сферичний кут μ_{21},що утворюється ортодромією M_1M_2 та меншою дугою меридіана PM_1P_1, що проходить через точку M_1.

На поверхні сфери звичайно розглядають фігури, що утворюються перетином дуг великих кіл сфери. Найпростішою фігурою є двокутник (наприклад PAP_1B) − частина поверхні сфери, що обмежена двома великими півколами (у даному прикладі півколами PAP_1 та PBP_1, що мають спільний діаметр PP_1. Сторони двокутника завжди рівні 180°. Сферичний двокутник визначається значенням кута його вершини. У разі двокутника PAP_1B цей кут − α.

Сферичний трикутник та його елементи

Сферичним трикутником називається частина поверхні сфери, обмежена трьома дугами великих кіл, що взаємно перетинаються.

У подальшому будемо розглядати тільки так звані Ейлерові сферичні трикутники. У таких трикутників кути та сторони змінюються лише в межах від 0° до 180°. Оскільки через дві точки, що не лежать на одному діаметрі, можна провести тільки одну дугу великого кола, меншу за 180°, то побудова трикутника на поверхні сфери є однозначною.

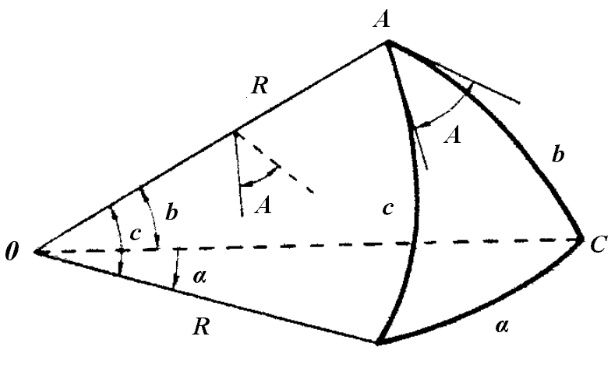
Площини великих кіл, якщо їх дуги утворюють сферичний трикутник ABC, перетинаються між собою у центрі сфери O та утворюють тригранник $OABC$ (мал.4).

Сферичний трикутник має шість основних елементів: три кути A, B, C та три сторони a, b, c. Кути позначаються тими ж великими літерами, що й вершини трикутника, а протилежні їм сторони – відповідними малими буквами.

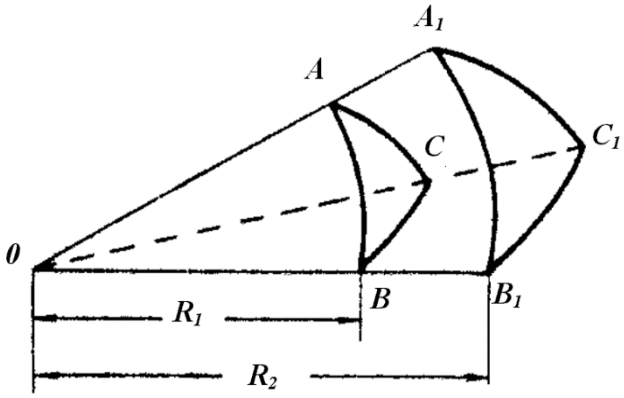
З малюнку 4 видно, що кути сферичного трикутника рівні відповідним двогранним кутам тригранника.

Сторони трикутника, визначені у кутовій чи радіанній мірі, дорівнюють відповідним плоским кутам тригранника. Тобто, усі шість елементів сферичного трикутника дорівнюють відповідним елементам тригранника.

Оскільки сторони сферичного трикутника a, b та c. прийнято вимірювати у кутовій або радіанній мірі, то вибір радіуса сфери стає не суттєвим. На малюнку 5 трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ – подібні. Вони мають різні (пропорційні) лінійні розміри, але їх елементи, відображені у кутовій мірі, є відповідно рівними. Тому з метою спрощення доведення формул радіус сфери приймають за одиницю, тобто беруть $R=1$ [10, с. 7].



Мал. 4



Мал. 5

За формою сферичні трикутники поділяють на:

- прямокутні, якщо хоча б один із кутів трикутника дорівнює 90°;
- прямосторонні, якщо хоча б одна із сторін трикутника дорівнює 90°;
- косокутні – в інших випадках.

Сферичні трикутники (за їх означенням) одночасно можуть бути прямокутними та прямосторонніми. Таким, наприклад, є трикутник PAB мал. 1, який має кути при вершинах A та B та сторони PA та PB, що дорівнюють 90°. Можливо побудувати сферичний трикутник, що має всі сторони та всі кути, що дорівнюють 90°. Цей трикутник являє собою восьму частину поверхні сфери та утворюється перетином трьох великих кіл з взаємно перпендикулярними площинами.

У сферичній геометрії, за аналогією до геометрії на площині, прийняті також поняття про рівнобічні та рівносторонні трикутники.

Розв'язання сферичних трикутників складає предмет сферичної тригонометрії та знаходить застосування в астрономії, картографії, навігації, вищій геодезії, кристалографії, фотограмметрії та при розв'язанні різноманітних геометричних задач у ряді інших дисциплін.

1.3. Сферична відстань. Географічна сферична система координат

Менша дуга АВ великого кола САВD визначає сферичну відстань (метрику) між точками А та В на сферичній поверхні(мал. 3) і називається ортодромією. Ортодромія АВ є найкоротшою геодезичною лінією на сфері, що з'єднує А та В . Звичайно її визначають у кутовій мірі.

Для введеної таким чином метрики справджується нерівність трикутника:

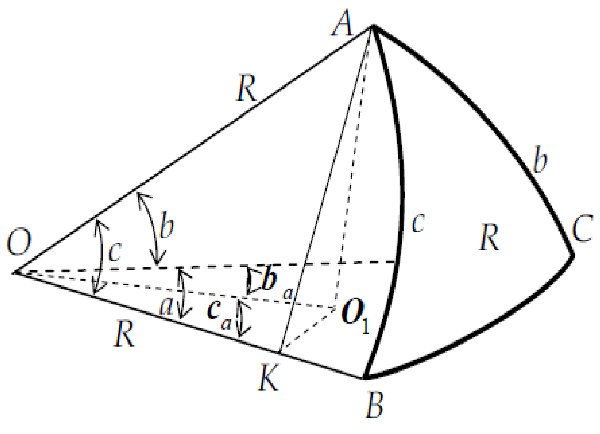
Сума двох сторін сферичного трикутника завжди більша за третю сторону:

$$a + b > c;\ b + c > a;\ a + c > b. \quad (4)$$

Нерівності (4) випливають зі співвідношень між плоскими кутами відповідного тригранника (мал.6). Доведемо, наприклад, другу нерівність $b + c > a$. Нехай $AO1 \perp (OBC)$ і $OB \perp O1K$.Тоді $OO1 \perp AO1$ і $OB \perp AK$. З прямокутних трикутників AOK і $O1OK$ маємо:

$OK = OA\cos c$; $OK\ OO1 = \cos c_a$.

Звідси:



Мал. 6

*OA*cos*c OO*1 =cos*ca*= *OO*1= cos*ca* .

Оскільки *OO* <*OA* 1 (як катет і гіпотенуза прямокутного Δ*AOO*1), то cos*c*<cos*ca*. Звідки *c* >*ca*. Аналогічно можна показати, що *b*>*ba*.

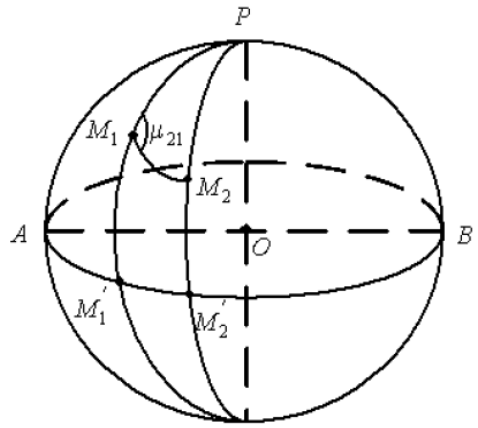
Тоді *b*+ *c*>*ba*+*ca* =α .

Для суми плоских кутів тригранника *OABC* виконується нерівність

0 <*a* + *b* + *c* < 360 (5),

яку можна перефразувати так:

Сума сторін сферичного трикутника завжди більша за 0° і менша за 360°.



Мал. 7

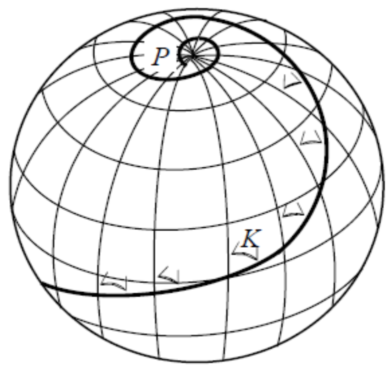
Безпосередньо з нерівності (4) випливає, що:

а) кожна зі сторін сферичного трикутника більша за різницю двох інших:

a >c - b; c >a - b ; b >a - c ; (6)

б) півпериметр p = (a + b + c) / 2 сферичного трикутника більший за кожну з його сторін:

p > a ; p > b ; p > c . (7)



Мал. 8

Положення довільної точки N на сферичній системи координат.

Географічна сферична система координат (мал.3) задається двома взаємно перпендикулярними великими колами CABD таPLCP1DT. Коло CABD називається екватором, а півколо PLCP1−початковим меридіаном. Координатна сітка цієї системи утворюється паралелями – колами малих кіл, що паралельні екватору,та меридіанами – півколами великих кіл, що перпендикулярні до екватора.

Кожний меридіан з'єднує північний P та південний P_1полюси. Місцезнаходження довільної точки N на сфері визначається двома координатами (φ,λ), де φ − широта та λ − довгота. Широта j вимірюється кутом φ=BON або сферичною відстанню φ=BN уздовж меридіана від екватора до відповідної паралелі LMNT (на північ або південь від 0□ до 90□). Довгота λ вимірюється кутом λ = CPB між початковим меридіаном PLCP1 та відповідним меридіаном PNBP1 або відстанню λ= CB уздовж екватора від початкового меридіану до відповідного меридіану $PNBP_1$ (на схід чи захід від 0□ до 180□).

Для двох довільних точок M_1 та M_2 на поверхні сфери азимутом точки M_2по відношенню до точки M_1називаєтьсясферичний кут μ_{21}, який утворюється ортодромієюM_1 M_2 та меншою дугою M меридіана PM_1 P_1 , що проходить через точку M_1(мал. 7).

Зауваження. У навігації при виборі траєкторії часто відмовляються від ортодромії, оскільки остання (крім випадків, коли нею служить дуга екватора чи меридіана) перетинає меридіани під різними кутами, що вимагає постійної зміни курсу судна. Зручніше рухатися по локсодромії – лінії, що утворює з кожним меридіаном сталий кут K. На сфері при K = 0□ і K =180□ локсодромія співпадає з меридіаном, а при K = 90□ і K = 270□ – з паралеллю чи екватором. В інших випадках вона має вигляд спіралі з нескінченним числом витків, що необмежено наближається до полюсів (мал. 8).

При переміщенні на великі відстані, коли різниця довжин локсодромії та ортодромії стає суттєвою, спочатку розраховують ортодромію, потім відмічають на ній проміжні точки і наближено замінюють кожну ділянку між сусідніми точками відповідною локсодромією.

Довжина S та кут K локсодромії між точками $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ та M_2 (φ_2 , λ_2) визначаються зі співвідношень:

а) при $\varphi_1 = \varphi_2$: K =90□ ; S =Rcos□$_1$·|Δ λ□| □ ρ□ ;

б) при $\varphi_1 \neq \varphi_2$:tg K=(Δ λ□ □ ρ□)÷ (lntg (45□+ φ□$_2$ / 2)- (lntg (45□+φ□$_1$ / 2));

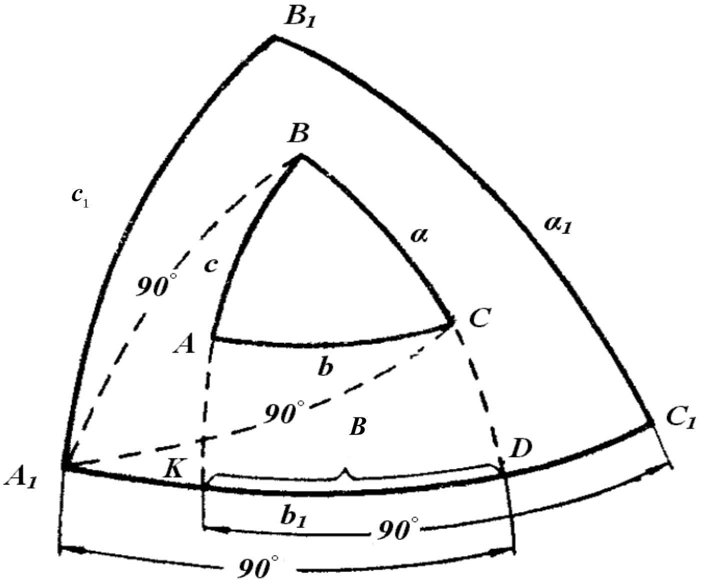
S=*R* Δφ□ □ ρ□ cosK. Тут широта φ□ і довгота λ□ подаються в градусах;

Δλ□ = λ_2□ – λ_1□ ;Δφ□ = φ_2□– φ□$_1$, [10, с. 11].

(Через складність доведення формул опускаємо).

1.4 Полярні сферичні трикутники

На мал. 9 зображено сферичний трикутник ABC. Розглядаючи вершини A, B та C як полюси, побудуємо для них відповідні поляри $-B_1C_1$, A_1C_1 та A_1B_1. Одержані так поляри при перетині між собою утворюють сферичний трикутник $A_1B_1C_1$, який називають *полярним* відносно до даного трикутника. ABC.



Мал. 9

Виявляється, що трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ взаємополярні, тобто якщо вершини трикутника ABC є полюсами сторін трикутника $A_1B_1C_1$, то і, навпаки, вершини трикутника $A_1B_1C_1$ є полюсами сторін трикутника ABC.

Основна властивість полярних трикутників: сума якого-небудь кута даного трикутника ABC та відповідної йому сторони полярного трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 180° [9, с. 11].

$$a_1 + A = b_1 + B = c_1 + C = 180°. \qquad (8)$$

З того, що трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ – взаємополярні випливає:

$$a + A_1 = b + B_1 = c + C_1 = 180°. \qquad (9)$$

1.5. Рівність сферичних трикутників. Симетричні та спряжені трикутники

Два сферичних трикутники називаються рівними, якщо вони співпадають при накладанні.

Два сферичних трикутники, що розміщені на одній і тій же сфері, рівні між собою якщо вони однаково розташовані та мають відповідно рівні:

1) дві сторони та кут між ними;

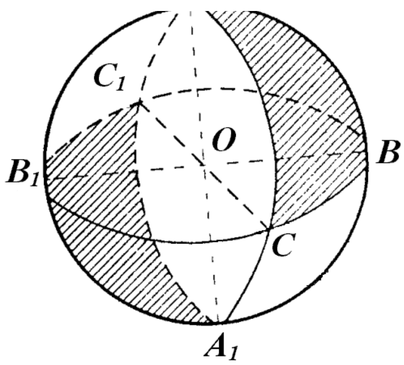
2) одну сторону та два прилеглих до неї кути;

3) три сторони;

4) три кути.

Перші три випадки аналогічні відповідним випадкам у геометрії на площині та можуть бути доведені шляхом накладання трикутників. Справедливість рівності трикутників у четвертому випадку випливає з наступних міркувань. Відомо, що три двогранні кути повністю визначають тригранник. Але два тригранники, що мають відповідно рівні двогранні кути, будуть рівними, отже їх можна сумістити один з одним усіма їхніми точками. Такі тригранники будуть утворювати на поверхні однієї і тієї ж сфери трикутники, що мають усі відповідно рівні та однаково розташовані елементи.
На поверхні сфери, як і на площині, можливий випадок, коли два трикутники мають відповідно рівні, але неоднаково розташовані елементи.
Такі трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ показані на мал. 10.

Мал. 10



Вони називаються симетричними трикутниками. Трикутник $A_1B_1C_1$ утворюється дугами великих кіл, що є продовженням сторін трикутника ABC. Отже, відповідні вершини обох трикутників лежать у діаметрально протилежних точках.

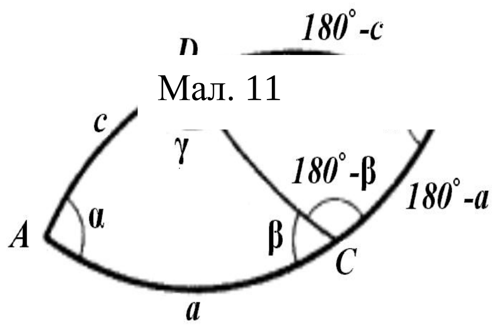
Рівність кутів симетричних трикутників доводиться шляхом порівняння відповідних їм двокутників.

На основі рівності кутів трикутників $A_1B_1C_1$ та ABC зазначаємо, що сторони цих трикутників також відповідно рівні одна одній, а їх площі рівновеликі.

На мал. №11 зображений двокутник з кутом α та проведена дуга великого кола $СД$. Дуга $СД$ ділить цей двокутник на два сферичних трикутники $АСД$ та $ВСД$ які називаються спряженими. У спряжених трикутників завжди є одна спільна сторона. Протилежні цій стороні кути спряжених трикутників рівні між собою. Кути при двох інших вершинах C та $Д_1$, а також прилеглі до них сторони доповнюють один одного до 180° [9, с. 15].

Співвідношення між елементами сферичного трикутника:

1. Сума сторін сферичного трикутника завжди більша за 0° і менша за 360°: $0^\circ < a+b+c < 360^\circ$. (10)
2. Сума двох сторін сферичного трикутника завжди більша за третю сторону: $a+b>c;\ b+c>a;\ a+c>b.$ (11)



Мал. 11

Нерівності (10) і (11) виражають відомі з геометрії на площині співвідношення між плоскими кутами тригранника.

Безпосередньо із нерівності (11) випливає, що:

а) кожна із сторін сферичного трикутника більша за різницю двох інших:

$a>c-b;\ c>a-b\ \ b>a-c$; (12)

б) півпериметр $p= a+b+c\ /2$ сферичного трикутника більший за кожну із його сторін: $p>a;\ p>b;\ p>c.$ (13)

3. Сума кутів сферичного трикутника завжди більша за 180° і менша за 540°: $180^\circ < A+B+C < 540^\circ$ (14)

Щоб довести нерівність (14) розглянемо два полярних трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Для трикутника $A_1B_1C_1$ у відповідності з нерівністю (10) маємо

$$0^\circ < a_1 + b_1 + c_1 < 360^\circ, \qquad (11)$$

На підставі властивостей полярних трикутників , маємо можливість написати: $a_1 = 180^\circ - A, \quad b_1 = 180^\circ - B, \quad c_1 = 180^\circ - C.$

Підставимо значення сторін a_1, b_1 та c_1 у нерівність (11) та знайдемо:

$$0^\circ < 540^\circ - \left(A + B + C \right) < 360^\circ$$

Віднімемо із усіх частин останньої нерівності 540°, змінимо знак на протилежний та одержимо вираз. Величина: $\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$ (15)
Називається *сферним надлишком* або *ексцесом* трикутника.

4. Сума двох кутів сферичного трикутника без третього менша за 180°:
$A + B - C < 180^\circ, A + C - B < 180^\circ, \ B + C - A < 180^\circ.$ (16)

Щоб довести нерівність (17) використаємо полярні сферичні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Для трикутника $A_1B_1C_1$ у відповідності із формулами (11) маємо: $a_1 + b_1 > c_1$.

Підставимо в останню нерівність значення сторін a_1 b_1 та c_1 і одержимо:

$360^\circ - A - B > 180^\circ - C$ або $A + B - C < 180^\circ$.

Аналогічно доводять інші нерівності.

5. Напроти рівних сторін сферичного трикутника лежать рівні кути: $a = b \Leftrightarrow A = B$.
6. Напроти більшого кута сферичного трикутника лежить більша сторона і, навпаки, проти більшої сторони сферичного трикутника лежить більший кут: $A > B \Leftrightarrow a > b$.

Обґрунтування тверджень 5 і 6 можна одержати із розгляду наступних малюнків.

Зауваження: Вказані співвідношення визначають умови існування сферичного трикутника, їх необхідно враховувати при розв'язанні задач.

1.7. Сума кутів та площа сферичного трикутника. Сума кутів

Теорема: У будь-якому сферичному трикутнику різниця суми двох будь-яких кутів і третього завжди менша двох прямих кутів.

Доведення. За властивостями полярних трикутників, розглянутих раніше, маємо: $a_1+b_1>c_1$, $a_1=180\square-\angle A$, $b_1=180\square-B$, $c_1=180-\angle C$,

Зробивши в нерівності заміну, дістанемо $(180\square-\angle A)+(180-\angle B)>180\square-C$, або після спрощення $\angle A+\angle B-\angle C<180$,що й треба було довести.

Означення: Різниця $<A+<B+<C=180\square+\mu$ між сумою кутів сферичного трикутника і сумою кутів трикутника називається сферичним надлишком трикутника. Зрозуміло, що $0\square<\mu\leq 360\square$.

Зауважимо, що у сферичному трикутнику поняття бісектриси , медіани і висоти, а також співвідношення між сторонами і кутами мають зміст, як і в трикутнику на площині.

Зокрема мають місце такі твердження :

2. Проти рівних сферичного трикутника лежать рівні кути і навпаки.
3. У будь - якому сферичному трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона і навпаки .
4. У рівнобедренному сферичному трикутнику кути,що лежать проти рівних сторін , рівні.

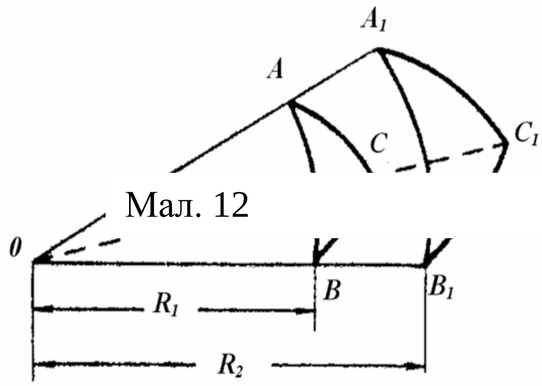
Площа трикутника

Спочатку одержимо формулу для площі сферичного двокутника. Якщо площу поверхні кулі поділити на 360 рівних частин, то кожна із них дорівнюватиме площі двокутника з кутом при вершині, що дорівнює 1°:

$$F_{1^\circ} = \frac{4\pi R^2}{360} = \frac{2\pi}{180} R^2 .$$

Тоді площа двокутника з кутом α° буде

$$F_\alpha = F_{1\cdot\alpha^\circ} = \frac{2\pi}{180^\circ} R^2 \alpha^\circ = \frac{2\alpha^\circ R^2}{\rho^\circ}, \quad (18)$$



Мал. 12

де, $\rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ,2957795...,$ та α° виражено у градусах.

Виразимо α у радіанній мірі та одержимо:

$$F_\alpha = 2\alpha R^2 . \quad (19)$$

Площа сферичного трикутника ABC згідно з мал. 12 може бути виражена такими трьома співвідношеннями:

$$\left.\begin{aligned} F_{ABC} &= F_A - F_{A_1BC} \\ F_{ABC} &= F_B - F_{AB_1C} \\ F_{ABC} &= F_C - F_{ABC_1} \end{aligned}\right\}, \quad (20)$$

де F_A, F_B, F_C − площі двокутників ABA_1C, BAB_1C та CAC_1B; F_{A_1BC}, F_{AB_1C}, F_{ABC_1} − площини трикутників A_1BC, AB_1C та ABC_1.

Складемо окремо ліві і праві частини рівняння (20) та врахуємо формулу (19). Тоді: $3F_{ABC} = 2R^2(A+B+C) - (F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{ABC_1})$.

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ − симетричні і їх площі рівні між собою. Тоді останнє рівняння можна замінити таким:

$$3F_{ABC} = 2R^2(A+B+C) - (F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{A_1B_1C}). \quad (21)$$

Другий доданок правої частини рівняння (21), дорівнює площі півсфери без площі трикутника ABC:

$F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{A_1B_1C} = 2\pi R^2 - F_{ABC}$ Отже, відповідно до виразу (21)

$2F_{ABC} = 2R^2(A+B+C-\pi)$ враховуючи, що

$A+B+C-\pi = \varepsilon$,

остаточно одержуємо: $F_{ABC} = R^2\varepsilon$, (21) де ε − сферичний надлишок трикутника ABC, що виражений у радіанній мірі.

Площа сферичного трикутника дорівнює добутку квадрата радіуса великого кола на сферичний надлишок.

1.8. Поняття про сферичний многокутник

Сферичним многокутником називається замкнена частина поверхні сфери, що обмежена послідовно сполученими дугами великих кіл, які менші півкола.

Сферичний многокутник називається опуклим, якщо він розміщений по один бік від кожного з великих кіл, частиною яких служать його сторони.

Кожному сферичному многокутнику відповідає многогранний кут, вершиною якого служить центр сфери, а ребрами – відрізки, що сполучають центр з вершинами многокутника. Навпаки, будь-який многогранний кут з вершиною в центрі сфери перетинає її по сферичному многокутнику.

Кути сферичного многокутника рівні відповідним двогранним кутам многогранника.

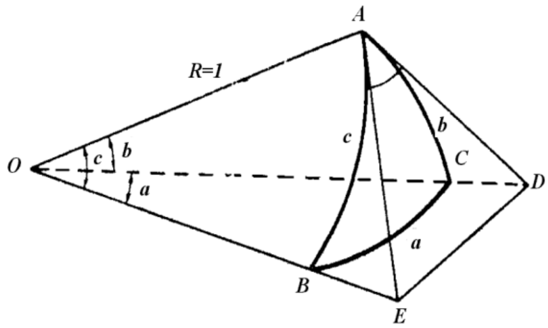
Можна довести, що периметр опуклого сферичного многокутника менше великого кола. Сполучимо одну з вершин опуклого сферичного

n–кутника дугами великих кіл зі всіма іншими його вершинами. Одержимо n - 2 сферичних трикутника. Площа n -кутника дорівнює сумі площ отриманих трикутників. Тому площу Fn n -кутника обчислюють за формулою $Fn= R2$ ($\Sigma n - (n-2)\pi$), де n S – сума всіх його внутрішніх кутів.

РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

2.1 Формули косинусів сторін сферичного трикутника

Розглянемо мал. 13, на якому зображено трикутник ABC на сфері з радіусом, що дорівнює одиниці та центром у точці 0. У вершині A проведені дотичні AE та AD до сторін b та c. Ці дотичні перетинаються у точках D і E із продовженням радіусів сфери, що проходять через вершини C і B.



Мал. 13

Застосуємо теорему косинусів тригонометрії на площині до трикутників AED та OED і запишемо для сторони DE:

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cos A,$$

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos \alpha \qquad (22)$$

Порівняємо між собою праві частини рівнянь (2.1) і знайдемо:

$$(\mathrm{OE}^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) - 2OD \cdot OE \cos\alpha + $$
$$+ 2AE \cdot AD \cos \mathrm{A} = 0$$

Зважаючи, що радіус сфери $R = 1 : (OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) = OA^2 + OA^2 = 2$;

$$AD = tg\, b; \quad AE = tg\, c; \quad OE = \frac{1}{cos\, c}; \quad OD = \frac{1}{cos\, b},$$

одержуємо: $1 - \dfrac{cos\, a}{cos\, b\, cos\, c} + tg\, b\ \ tg\, c\ \ cos\, A = 0$

Перемножимо усі доданки останнього рівняння на $\cos b\ cos\, c$ та одержимо остаточно: $\cos a = cos\, b\ \ cos\, c + sin\, b\ \ sin\, c\ \ cos\, A.$ (23)

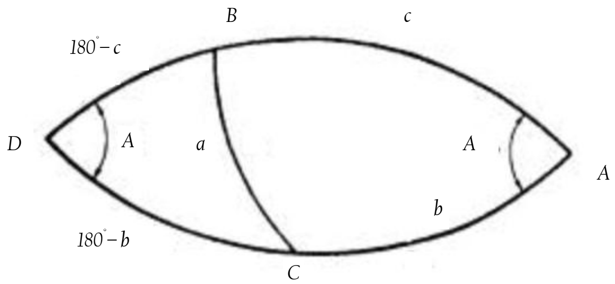
Побудова на мал. можлива, якщо кожна із сторін b і c менша 90°. Тому вираз (23) потрібно узагальнити на той випадок, коли трикутник має сторони більші за 90°. Для цього звернемося до мал.(13*). На ньому зображено ΔABC, що має сторони $b>90^\circ$ і $c>90^\circ$. Якщо продовжимо сторони b і c до їх перетину у точці D, то одержимо спряжений трикутник BCD, у якому кожна із сторін 180° − b і 180° − c буде менша за 90°. Застосовуючи на цій основі вираз (23) до трикутника BCD, можемо записати:

$$\cos a = \cos(180^\circ - b)\cos(180^\circ - c) + \sin(180^\circ - b)\sin(180^\circ - c)\times \cos A$$

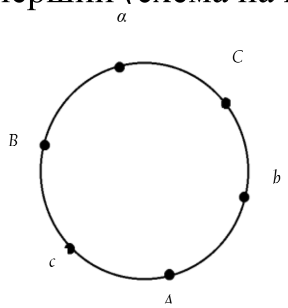
Або $\cos a = \cos b \ \cos c + \sin b \ \sin c \ \cos A$, що співпадає із формулою (23).

Косинус сторони сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох інших сторін, складеному з добутком синусів цих же сторін на косинус кута між ними, [10, с. 19].

Зауваження: При написанні формул сферичної тригонометрії часто використовують метод перестановки елементів по колу: кожна із сторін та кожний із кутів трикутника замінюється у формулі, що розглядається, наступними за ходом сторонами та кутами (у довільному напрямі), при цьому останній елемент завжди замінюється на перший (схема на мал.13**)..



Мал. 13*



Мал. 13 **

Застосуємо метод перестановки елементів по колу до формули (23) і запишемо співвідношення вигляду (23) для кожної із трьох сторін трикутника:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \ \cos c + \sin b \ \sin c \ \cos A \\ \cos b &= \cos a \ \cos c + \sin a \ \sin c \ \cos B \\ \cos c &= \cos a \ \cos b + \sin a \ \sin b \ \cos C \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

2.2 Формули косинусів кутів сферичного трикутника

Щоб одержати формули косинусів кутів сферичного трикутника запишемо співвідношення (24) для сторін полярного трикутника $A_1B_1C_1$ по відношенню до трикутника ABC:

$$\begin{aligned}\cos a_1 &= \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1\\ \cos b_1 &= \cos a_1 \cos c_1 + \sin a_1 \sin c_1 \cos B_1\\ \cos c_1 &= \cos a_1 \cos b_1 + \sin a_1 \sin b_1 \cos c_1\end{aligned} \qquad (25)$$

Згідно з основною властивістю взаємополярних трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC:

$$a_1 = 180^\circ - A,\ b_1 = 180^\circ - B,\ c_1 = 180^\circ - C \text{ і}$$

$$A_1 = 180^\circ - a,\ B_1 = 180^\circ - b,\ C_1 = 180^\circ - c \qquad (26)$$

Підставимо (26) у (25):

$$\left.\begin{aligned}&\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B)\cos(180^\circ - C) +\\ &+ \sin(180^\circ - B)\sin(180^\circ - C)\cos(180^\circ - a)\\ &\cos(180^\circ - B) = \cos(180^\circ - A)\cos(180^\circ - C) +\\ &+ \sin(180^\circ - A)\sin(180^\circ - C)\cos(180^\circ - b)\\ &\cos(180^\circ - C) = \cos(180^\circ - A)\cos(180^\circ - B) +\\ &+ \sin(180^\circ - A)\sin(180^\circ - B)\cos(180^\circ - c)\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Скористуємось формулами зведення тригонометричних функцій та помножимо на від'ємну одиницю обидві сторони кожного співвідношення (27). В результаті одержимо формули косинусів кутів сферичного трикутника.

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a\\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b\\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Косинус кута сферичного трикутника дорівнює від'ємному добутку косинусів двох інших кутів трикутника, складеному з добутком синусів цих же кутів на косинус сторони між ними [9, с. 20].

2.3 Теорема синусів

Відношення синуса кута сферичного трикутника до синусу протилежної сторони є величина стала.

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}=K\,, \qquad (29)$$

де $K=const$

Доведення:

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\;;$$

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right)^2=$$

$$=\frac{\sin^2 b\sin^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 b\cos^2 c}{\sin^2 b\sin^2 c}=$$

$$=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 b\cos^2 c}{\sin^2 b\sin^2 c}=$$

$$=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}\,.$$

Поділимо обидві частини одержаного виразу на $sin^2 a$

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\,\sin^2 b\,\sin^2 c}=K^2 \quad (30)$$

Звідки: $\frac{\sin A}{\sin a}=K$.

У величину K^2 кожна із сторін сферичного трикутника входить однаково і заміна сторін по колу не змінить значення величини K, тобто значення K є стала величина для даного трикутника.

Отже: $\frac{\sin B}{\sin b}=K$; $\frac{\sin C}{\sin c}=K$.

Теорема доведена.

Теорема синусів установлює зв'язок між сторонами та протилежними їм кутами сферичного трикутника.

2.4 Формули п’яти елементів сферичного трикутника

Формули п’яти елементів установлюють зв'язок:

а) між трьома сторонами та двома кутами сферичного трикутника (основні формули п’яти елементів);

б) між трьома кутами та двома сторонами сферичного трикутника (змінені формули п’яти елементів).

Щоб одержати формули п’яти елементів, скористуємось формулою косинусів сторін сферичного трикутника.

Розглянемо пару із другої і третьої формул:

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \qquad (31)$$

Виключимо *cos c* із першої формули (31) скориставшись другою:

$$\cos b = \cos a \left(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\right) + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos b = \left(1 - \sin^2 a\right)\cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos b = \cos b - \sin^2 a \cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B$$

Зведемо подібні члени та розділимо обидві частини рівності на *sin a* і одержимо: $\sin c \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C$ (32)

Якщо у формулах (2.6′) виключити $\cos b$, то одержимо:

$$\sin b \cos C = \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B \qquad (33)$$

Зробимо аналогічні перетворення для двох інших пар формул та одержимо основні формули п’яти елементів.

$$\left.\begin{aligned} \sin c \cos B &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C \\ \sin b \cos C &= \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B \\ \sin c \cos A &= \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos C \\ \sin a \cos C &= \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B &= \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A \\ \sin b \cos A &= \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Добуток синуса сторони на косинус прилеглого кута дорівнює добутку синуса третьої сторони на косинус протилежної цьому куту сторони без добутку косинуса третьої сторони на синус тієї ж протилежної сторони і на косинус кута між ними.

Формули (34) однорідні відносно синусів сторін сферичного трикутника. Згідно з теоремою синусів (30) зробимо таку заміну у цих формулах:

$$\sin \alpha = \frac{1}{K} \sin A; \ \sin b = \frac{1}{K} \sin B; \ \sin c = \frac{1}{K} \sin C$$

Після простих перетворень, одержимо так звані змінені формули п’яти елементів, що установлюють зв'язок між трьома кутами і двома сторонами сферичного трикутника

$$\left.\begin{aligned} \sin A\cos b &= \sin C\cos B+\cos C\sin B\cos a\\ \sin A\cos c &= \sin B\cos C+\cos B\sin C\cos a\\ \sin B\cos a &= \sin C\cos A+\cos C\sin A\cos b\\ \sin B\cos c &= \sin A\cos C+\cos A\sin C\cos b\\ \sin C\cos b &= \sin A\cos B+\cos A\sin B\cos c\\ \sin C\cos a &= \sin B\cos A+\cos B\sin A\cos c \end{aligned}\right\}, \quad (35)$$

Добуток синуса кута на косинус прилеглої сторони дорівнює добутку косинуса кута, протилежного цій стороні, на синус третього кута плюс добуток синуса протилежного кута на косинус третього кута і на косинус сторони між ними [3, с. 45].

2.5. Формули чотирьох елементів сферичного трикутника

Якщо у лівій частині кожної формули (34) зробити заміну синусів сторін за формулами, що випливають із теореми синусів

$$\sin c=\frac{\sin b}{\sin B}\sin C;\ \sin b=\frac{\sin c}{\sin C}\sin B;$$

$$\sin c=\frac{\sin a}{\sin A}\sin C;\ \sin a=\frac{\sin c}{\sin C}\sin A;$$

$$\sin a=\frac{\sin b}{\sin B}\sin A;\ \sin b=\frac{\sin a}{\sin A}\sin B,$$

то після простих перетворень одержимо формули чотирьох елементів:

$$\left.\begin{aligned} \cos a\cos C &= ctg\, b\sin a-ctg\, B\sin C\\ \cos a\cos B &= ctg\, c\sin a-ctg\, C\sin B\\ \cos b\cos C &= ctg\, a\sin b-ctg\, A\sin C\\ \cos b\cos A &= ctg\, c\sin b-ctg\, C\sin A\\ \cos c\cos A &= ctg\, b\sin c-ctg\, B\sin A\\ \cos c\cos B &= ctg\, a\sin c-ctg\, A\sin B \end{aligned}\right\} (36)$$

добуток косинусів середніх елементів дорівнює добутку котангенса крайньої сторони на синус середньої без добутку котангенса крайнього кута на синус середнього кута.

Одержані вище шість груп основних формул надають можливість розв'язати довільний сферичний трикутник за відомими трьома його елементами. Для практичних розрахунків у типових задачах звичайно використовують більш прості співвідношення, що знаходяться перетворенням основних формул.

Формули виражають сферичний надлишок як функцію трьох сторін і одного кута сферичного трикутника.

Синус половини сферичного надлишку трикутника дорівнює добутку синусів половини двох сторін на синус кута між ними, поділеному на косинус половини третьої сторони.

Друга формула Коньолі:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\ sin(p-a)\,sin(p-b)\,sin\,(p-c)}}{2\,cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} \qquad (37)$$

виражає сферичний надлишок як функцію трьох сторін трикутника. Цю формулу одержують заміною у першій формулі (4.20) $sin\,C$ виразом:

$$sin\,C=\frac{2\sqrt{\sin p\ sin(p-a)\,sin(p-b)\,sin(p-c)}}{\sin a\ sin\,b}$$

Сферичний надлишок можливо обчислити також за формулою Люїльє:

$$tg\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{tg\frac{p}{2}tg\frac{p-a}{2}tg\frac{p-b}{2}tg\frac{p-c}{2}} \quad (38)$$

що дає сферичний надлишок як функцію трьох сторін сферичного трикутника. Він одержується з використанням першої і третьої формул Деламбера-Гауса .

РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

3.1 Визначення довжини дуги паралелі земної кулі

Приклад 1. Визначити довжину дуги ℓ паралелі земної кулі ($R = 6370$ км) на широті $\varphi = 42^\circ 31' 25''$, якщо різниця довгот $\Delta\lambda = 8^\circ 12' 11''$.

- Довжина дуги паралелі визначається за формулою:

$$\ell = r\Delta\lambda ,$$

де r − радіус малого кола, частиною якого є дуга ℓ; $\Delta\lambda$ − різниця довгот (у радіанах) кінців дуги;

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\lambda^\circ}{\rho^\circ}; \ \rho^\circ = 57^\circ,2957795$$

Радіус малого кола (1.2):

$$r = R cos\varphi$$

де R − радіус сфери (у даному випадку – земної кулі); φ − широта паралелі.

Тоді: $\ell = R\Delta\lambda\cos\varphi$ *

Обчислення:

Оскільки величина $R = 6370$ має чотири значущі цифри, то інші величини для розрахунку візьмемо з п'ятьма значущими цифрами, а потім результат округлимо до чотирьох, тобто:

$\ell = 6370 \cdot 0{,}14317 \cdot 0{,}73700 \approx 672{,}1$

Але величина R задана в км, отже:

Відповідь: 672 км.

---

*Усі розрахунки мають наближений характер, тому що перехід від величини кута, поданого у градусах, хвилинах та секундах, до величини кута, вираженого тільки у градусній мірі та визначення за даними кутами (або сторонами у кутовій мірі) тригонометричних функцій носять наближений характер. При усіх розрахунках користувались правилами підрахунку цифр. Результати обчислень приведені після знаків «=» замість «$\approx$» для зручності. Похибки усіх розрахунків становлять $\pm 0{,}5$ останньої значущої цифри результату.

3.2. Визначення довжини дуги екватора між меридіанами

Приклад 2. Довжина дуги AB паралелі земної кулі на широті $\varphi = 42^\circ 31' 25''$ дорівнює $\ell = 672$ км. Визначити довжину дуги екватора S між меридіанами, що проходять через точки A та B.

- Довжина дуги екватора S, що розташована між двома меридіанами, визначається за формулою:

$$S = R\Delta\lambda$$

де R − радіус земної кулі; $\Delta\lambda$ − різниця довгот (у радіанах).

Різниця довгот:

$$\Delta\lambda = \frac{\ell}{R\cos\varphi}$$

де ℓ − довжина дуги паралелі; φ − широта паралелі.

Тоді: $S = \dfrac{\ell}{\cos\varphi}$

Обчислення:

$\varphi = 42^\circ{,}5236111$; $\cos\varphi = 0{,}7369989$

$$S = \frac{672}{0{,}737} = 912$$

Відповідь: 912 км.

3.3.Визначення радіуса сфери

Приклад 3. Визначити радіус сфери R, якщо площа сферичного трикутника $F = 687200$ км^2, а його кути:

$A = 123^\circ{,}251744$; $B = 50^\circ{,}00671$ та $C = 84^\circ{,}12262$

- Площа сферичного трикутника визначається за формулою (1.19):

$$F = R^2 \varepsilon$$

де R − радіус сфери (в кілометрах); ε − сферичний надлишок (у радіанах).

Обчислення:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ = 123^\circ{,}251744 + 50^\circ{,}00671 + 84^\circ{,}12262 -$$
$$-180^\circ = 77^\circ{,}381074$$

$\varepsilon = 1{,}35055$ (в радіанах)

$$R = \sqrt{\frac{F}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{687200}{1{,}35055}} \cong 713$$

Відповідь: 713 км.

3.4. Обчислення сферичної відстані між двома точками в одиницях радіуса

А) Дано сферичну відстань між двома точками у градусах. Обчислити її в одиницях радіуса врахувавши:

Sin1’’ =0, 0002908884

Sin1°=0,017453364

$$\boldsymbol{\varphi^\circ = 127^\circ 13' 14''}$$
$$\underline{\boldsymbol{l = \varphi'' R \sin 1''}}$$
$$\boldsymbol{\varphi'' = \ 127 \cdot 60 + 13 \ \ \cdot 60 + 14 = 457994''}$$
$$\boldsymbol{l = 457994 \cdot R \cdot 0{,}00000484814 = 2{,}2204\ R}$$

Б)Дано сферичну відстань між двома точками в одиницях радіуса, обчислити її в градусах

$$\boldsymbol{l = 2{,}1505R}$$
$$\underline{\boldsymbol{l = \varphi'' R \sin 1''}}$$
$$\boldsymbol{\varphi'' = \frac{l}{R \sin 1''} = \frac{2{,}1505R}{R \cdot 0{,}00000484814} = 443572{,}1714''}$$
$$\boldsymbol{\varphi'' = 443572{,}1714''}$$
$$\boldsymbol{\varphi^\circ = 123^\circ 12' 52''}$$

3.5. Обчислення лінійних в лінійних одиницях довжини дуги більшого кола земної кулі

Обчислити в лінійних одиницях довжину дуги більшої окружності зеленої кулі, що спирався на кут $\boldsymbol{\alpha}$; R=6370 км

R= 6370 км

$\boldsymbol{\alpha = 93°17'18''}$

$\underline{\boldsymbol{l = \varphi'' R \sin 1''}}$

$\boldsymbol{\alpha'' = \ 93 \ \cdot 60 + 17 \ \ \cdot 60 + 18 = 335838''}$

$\boldsymbol{l = 335838 \cdot 6370 \cdot 0,00000484814 = 10371,568}$ км

3.6. Існування сферичного трикутника за заданими елементами

Встановити чи існує сферичний трикутник за заданими даними елементами.

а) $\mathbf{A = 133°05'06''}$

$\mathbf{B = 59°12'14''}$

$\mathbf{C = 78°11'13''}$

Для сферичного трикутника виконується:

$\underline{\mathbf{180°} < \mathrm{A + B + C} < \mathbf{540°}}$

Перевіримо:

$\mathrm{A + B + C} = \mathbf{133°\ 05'\ 06' + \ 59°\ 12'14'' + \ 78°\ 11'13'' = 270°\ 28'33''}$

Також виконується, що:

$\mathbf{A + B - C < 180°}$

$\mathbf{A + C - B < 180°}$

$\mathbf{B + C - A < 180°}$

Тому такий сферичний трикутник <u>існує!</u>

б) $\boldsymbol{a} = \mathbf{1°\ 02'03''}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{13°\ 12'17''}$, $\boldsymbol{c} = \mathbf{25°\ 14'18''}$

Для сферичного трикутника виконується :

$\underline{\mathbf{0°} < \boldsymbol{a + b + c} < \mathbf{360°}}$

Перевіримо:

$\boldsymbol{a + b + c} = \mathbf{1°\ 02'03'' + \ 13°\ 12'17'' + \ 25°\ 14'18'' = 39°\ 28'38''}$

Також має виконуватись, що:

$\mathrm{a} + \mathbf{b} > \boldsymbol{c}$

$\mathbf{b + c} > \boldsymbol{a}$

$\mathbf{a + c} > \boldsymbol{b}$

Але маємо: $\boldsymbol{a + b} = \mathbf{1°\ 02'03'' + \ 13°\ 12'17'' = 14°\ 14'20''} < \boldsymbol{c}$

Тому такий сферичний трикутник <u>не існує!</u>

3.7. Обчислення площі сферичного двокутника

А) $\boldsymbol{\alpha = 58° \, 02' 15''}$

R= 54, 8 км

$\boldsymbol{s_\alpha = 2\alpha R^2}$ – у радіанній мірі.

$\boldsymbol{\alpha = \alpha'' \sin 1'' = ((58 \cdot 6\,0 + 2) \cdot 60 + 15) \cdot 0,00000484814 = 1,0129}$

$\boldsymbol{s_\alpha = 2 \cdot 1,0129 \cdot 54,8^2 = 6083,8355}$

Б) Обчислити площу сферичного двокутника:

$\mathbf{A = 51° \, 30' 00''}$

$\mathbf{B = 59° \, 15' 57''}$

$\mathbf{C = 131° \, 29' 44''}$

R= 209 м

$\underline{\mathbf{S = R^2 \cdot E}}$

R – радіус сфери

S – сферичний надлишок (у радіанах)

$$\mathbf{E° = A + B + C - 180° = 51° \, 30' 00'' + \; 59° \, 15' 57'' - 131° \, 29' 44'' - 180° == 62° \, 15' 41''}$$

$$\mathbf{E'' = \; 62° \cdot 60 + 15 \; \cdot 60 + 41 = 224141}$$

E=$\mathbf{E''}$sin 1″=1,0867

S=$\mathbf{209^2 \cdot 1,0867 \approx 47467}$ $м^2$

3.8. Розвязання прямокутного трикутника

А) $\mathbf{b = 8° \, 24' 36''}$

$\mathbf{c = 56° \, 37' 40''}$

Обчислити a, B, C.

Якщо трикутник прямокутний, то A =90°.

Запишемо співвідношення для сторін трикутника:

cos a = cos b cos c + sin b sin c cos A

cosa = cos$\mathbf{8°\ 24'36''}$ $\mathbf{\cos 56°\ 37'40'' +\ 0}$, бо $\mathbf{\cos 90\,° = 0}$

cosa = 0, 5441

a= arcos 0, 5441

a= 57° 2′ $\mathbf{12''}$

За теоремою синусів:

$\frac{\mathbf{\sin A}}{\mathbf{\sin a}}=\frac{\mathbf{\sin B}}{\mathbf{\sin b}}=\frac{\mathbf{\sin C}}{\mathbf{\sin c}}$

Sin B =$\frac{\mathbf{\sin A}}{\mathbf{\sin a}}\mathbf{\sin b} = \frac{\mathbf{\sin 90°}}{\mathbf{\sin 57°\ 2'12''}} \cdot \mathbf{\sin 8°\ 24'36'' = 0,1227}$

B=7° $\mathbf{02'53''}$

Sin C =$\frac{\mathbf{\sin A}}{\mathbf{\sin a}}\mathbf{\sin c} = \frac{\mathbf{\sin 90°}}{\mathbf{\sin 57°\ 2'12''}} \cdot \mathbf{\sin 56°\ 37'40'' = 0,9954}$

C= 84° $\mathbf{30'08''}$

Відповідь:a= 57° 2′ $\mathbf{12''}$, B=7° $\mathbf{02'53''}$, C= 84° $\mathbf{30'08''}$.

(рахувала калькулятором - онлайн)

1) planetcal.ru/166/

2)www.calculator 888/inzhenernyikalkulyator/

Б) Розвязати прямокутний трикутник

C= $\mathbf{27°58'02''}$

B= 72° $\mathbf{24'40''}$

Обчислити a, b, C.

Якщотрикутникпрямокутний, то A=90°.

Запишемоспіввідношення для кутів трикутника:

cos C= -cosAcosB+sinAsinBcos C

cos C= 0+sin 90°sin72°$\mathbf{24'40''}$ $\mathbf{\cos 27°\ 58'02''}$

cos C= 0,8419

C=32° $\mathbf{39'31''}$

За теоремою синусів:

$\frac{\mathbf{sin\,A}}{\mathbf{sin\,a}}=\frac{\mathbf{sin\,B}}{\mathbf{sin\,b}}=\frac{\mathbf{sin\,C}}{\mathbf{sin\,c}}$

sin a= $\frac{\mathbf{sin\,A\,sinc}}{\mathbf{sin\,C}}=\frac{\mathbf{sin90°\,sin27°58'02''}}{\mathbf{sin\,32°\,39'31''}}=\mathbf{0,8692}$

a= 60° $\mathbf{21'57''}$

sin b=$\frac{\mathbf{sinB\,sin\,c}}{\mathbf{sin\,C}}=\frac{\mathbf{sin\,72°\,24'40''\cdot sin\,27°58'02''}}{\mathbf{sin\,32°39'31''}}=\mathbf{0,8285}$

b= 55° $\mathbf{56'42''}$

Відповідь:a= 60° $\mathbf{21'57''}$, b= 55° $\mathbf{56'42''}$, C=32° $\mathbf{39'31''}$.

В) Розвязати прямокутний трикутник

B=$\mathbf{48°12'17''}$

C=$\mathbf{52°30'18''}$

Обчислити a, b, c.

Якщо трикутник прямокутний, то A=90°.

Запишемо співвідношення для кутів трикутника:

cosB= -cosAcosC+ sinAsinCcosb

$$\mathbf{cosb}=\frac{\mathbf{cosB+cosA\,cos\,C}}{\mathbf{sinA\,sin\,C}}=\frac{\mathbf{cos48°\,12'17''+0}}{\mathbf{sin\,90°\,sin\,52°\,30'18''}}=\mathbf{0,8401}$$

b= 32° $\mathbf{50'57''}$

За теоремою синусів:

$\frac{\mathbf{sin\,A}}{\mathbf{sin\,a}}=\frac{\mathbf{sin\,B}}{\mathbf{sin\,b}}=\frac{\mathbf{sin\,C}}{\mathbf{sin\,c}}$

sin a= $\frac{\mathbf{sin\,A\,sinb}}{\mathbf{sin\,B}}=\frac{\mathbf{sin90°\,sin32°50'57''}}{\mathbf{sin\,48°\,12'17''}}=\mathbf{0,7276}$

a= $\mathbf{46°41'08''}$

sin c= $\frac{\mathbf{sin\,C\,sina}}{\mathbf{sin\,A}}=\frac{\mathbf{sin52°\,30'18''\,sin\,46°41'08''}}{\mathbf{sin\,90°}}=\mathbf{0,5773}$

c= 35°$\mathbf{15'39''}$

Відповідь: a= $\mathbf{46°41'08''}$, b= 32° $\mathbf{50'57''}$, c= 35°$\mathbf{15'39''}$.

Г) Розвязати прямокутний трикутник

A= $\mathbf{115°17'30''}$

B= 90° $\mathbf{28'31''}$

Обчислитиb, c, C.

Якщо трикутник прямокутний, то A=90°.

Запишемо теорему синусів:

$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$

Отже, sin b= $\frac{\sin B}{\sin A}\mathbf{\sin a}=\frac{\sin 90°\,28'31''}{\sin 90°}\mathbf{\sin 115°17'30''=0,9041}$

b= 64° $\mathbf{41'53''}$

За формулою п’яти елементів:

sin a cos b= sin c cosb- cosc sinb cos A

Підставимо:

Sin 115° $\mathbf{17'30''\cdot\cos 90°\,28'31''=\ sinc\cdot\ cos64°41'53''-0}$,

(cos 90° $=\mathbf{0}$)

Sin c= 0,0298

C= 1°$\mathbf{42'34''}$ або 178° $\mathbf{17'26''}$

За теоремою синусів:

$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin C}{\sin c}$

Sin c= $\frac{\sin c}{\sin a}\cdot\mathbf{\sin A}=\frac{\sin 1°\,42'34''}{\sin 115°17'30'}\cdot\mathbf{\sin 90°=0}$

C=1° $\mathbf{53'28''}$ або $\mathbf{178°\,06'32''}$

Перевірим умови існування трикутника, тому відповідь:

b=64° 41’ 53’’

c=178° 17’ 26’’

C=178 °06’ 32’

3.9. Розв’язування косокутного трикутника

$\mathbf{a = 139° \; 03'28''}$

$\mathbf{b = 40° \; 11'24''}$

$\mathbf{c = 148° \; 47' \; 47'}$

Обчислити A, B, C, E.

За формулами косинусів сторін маємо:

1) cosa=cosbcosc+sinbsinccosA

cosA=$\frac{cosa-cosbcosc}{sinbsinc} = \frac{-0{,}7554-0{,}7014\cdot(-0{,}8553)}{0{,}7127\cdot 0{,}5181} = \mathbf{-0,4211}$

A=114° $\mathbf{54'15''}$

2) cosb=cosacosc+sinasinccosB

cosB=$\frac{cosb-cosacosc}{sinasinc} = \frac{0{,}7014-(-0{,}7554)\cdot(-0{,}8553)}{0{,}6553\cdot 0{,}5181} = \mathbf{0,1629}$

B=80° 37’ 29’’

3) cosc=cosacosb+sinasinbcosC

cosC=$\frac{cosc-cosacosb}{sinasinb} = \frac{-0{,}8553-(-0{,}7554)\cdot 0{,}7014}{0{,}6553\cdot 0{,}7127} = \mathbf{-0,6969}$

C=134°10’36’’

Сферичний надлишок:

$$\boldsymbol{\varepsilon = A + B + C - 180° = 114°54'15'' + 80°37'29'' + 134°10'36'' - 180° =}$$

$$\mathbf{= 149°42'20''}.$$

РОЗДІЛ 4. ДИСТАНЦІЙНЕ НАВЧАННЯ У ВИВЧЕННІ ЕЛЕМЕНТІВ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

4.1. Цілі дистанційного навчання

Дистанційне навчання - це нова, специфічна форма навчання, дещо відмінна від звичних форм очного або заочного навчання. Вона передбачає інші засоби, методи, організаційні форми навчання, іншу форму взаємодії вчителя та учнів, учнів між собою. Разом з тим як будь-яка форма навчання, будь-яка система навчання вона має той же компонентний склад: цілі, зумовлені соціальним замовленням для всіх форм навчання; зміст, також багато в чому певний діючими програмами для конкретного типу навчального закладу, методи, організаційні форми, засоби навчання. Останні три компоненти. В дистанційній формі навчання обумовлені специфікою використовуваної технологічної основи (наприклад, тільки комп'ютерних телекомунікацій, комп'ютерних телекомунікацій в комплексі з друкованими засобами, компакт-дисками, так званої кейс-технологією, тощо).

Не слід змішувати заочне і дистанційне навчання. Їх головна відмінність в тому, що при дистанційному навчанні забезпечується систематична і ефективна інтерактивність. Слід розглядати дистанційне навчання як нову форму навчання та відповідно дистанційна освіта (як результат, так і процес, систему) як нову форму навчання. Хоча воно не може розглядатися як система зовсім автономна. Дистанційне навчання будується у відповідності з тими ж цілями і змістом, що і очне навчання. Але форми подачі матеріалу і форми взаємодії вчителя та учнів і учнів між собою різні. Дидактичні принципи організації дистанційного навчання (принципи науковості, системності та систематичності, активності, принципи розвивального навчання, наочності, диференціації та індивідуалізації навчання та ін) ті ж що й в очному навчанні, але відмінна їх реалізація яка обумовлена специфікою нової форми навчання, можливостями інформаційного середовища інтернет та її послугами. Таким чином, з одного боку, дистанційне навчання слід розглядати у системі освіти (неодмінно в системі безперервної освіти), припускаючи при цьому спадкоємність окремих її ланок. З іншого, дистанційне навчання необхідно розрізняти як систему і як процес. Як і в інших формах навчання, дистанційне навчання передбачає теоретичне осмислення етапу педагогічного проектування, її змістовної та педагогічної (у плані педагогічних технології, методів, форм навчання) складових.

Отже, завданнями етапу педагогічного проектування є: створення електронних курсів, електронних підручників, комплексів засобів навчання, розробка педагогічних технологій організації процесу навчання в мережах.

Курси дистанційного навчання припускають ретельне і детальне планування діяльності учня, її організації, чітку постановку завдань і цілей навчання, доставку необхідних навчальних матеріалів, які повинні забезпечувати інтерактивність між учнем та викладачем, зворотний зв'язок між учнем та навчальнимматеріалом, надавати можливість групового навчання. Наявність ефективного зворотного зв'язку дозволяє учневі отримувати інформацію про правильність свого просування по шляху від незнання до знання. Мотивація - також найважливіший елемент будь-якого курсу дистанційного навчання. Для її підвищення, важливо застосовувати різноманітні прийоми та засоби. А так само необхідно передбачити інваріантні компоненти при розробці курсів дистанційного навчання.

До цілей дистанційного навчання відносять:

1. професійна підготовка та перепідготовка кадрів;
2. підвищення кваліфікації педагогічних кадрів за певними спеціальностями;
3. підготовка школярів по окремих навчальних предметів до здачі іспитів екстерном;

4. підготовка школярів до вступу в навчальні заклади певного профілю;
5. поглиблене вивчення теми, розділу зі шкільної програми або поза шкільного курсу;
6. ліквідація прогалин у знаннях, уміннях, навичках школярів з певних предметів шкільного циклу;
7. базовий курс шкільної програми для учнів, які не мають можливості з різних причин відвідувати школу взагалі або протягом якогось відрізка часу;
8. додаткова освіта за інтересами.

Безперечними перевагами дистанційного навчання є:
1. більш висока ефективність професійної підготовки в порівнянні з вечірньою та заочними формами навчання при більш низькій вартості освітніх послуг;
2. скорочення термінів навчання;
3. можливості паралельного навчання в російському і зарубіжному вузах;
4. незалежність студента від географічного розташування вузу.

Експерименти підтвердили що якість і структура навчальних курсів, так само як і якість викладання при дистанційному навчанні часто набагато краще, ніж при традиційних формах навчання. Нові електронні технології можуть не тільки забезпечити активне залучення учнів у навчальний процес, але і дозволяють керувати цим процесом на відміну від більшості традиційних навчальних середовищ. Інтеграція звуку, руху, образу і тексту створює нову надзвичайно багату за своїми можливостями навчальне середовище, з розвитком якої збільшиться і ступінь залучення учнів у процес навчання. Інтерактивні можливості використовуються в системі дистанційного навчання програм і систем доставки інформації дозволяють налагодити і навіть стимулювати зворотний зв'язок, забезпечити діалог і постійну підтримку, що є неможливим у Більшості традиційних систем навчання. Сучасні комп'ютерні телекомунікації здатні забезпечити передачу знань та доступ до різноманітної навчальної інформації нарівні, а іноді і набагато ефективніше, ніж традиційні засоби навчання.

Ефективність дистанційного навчання безпосередньо залежить від тих викладачів, хто веде роботу з учнями в Інтернет. Це повинні бути викладачі з універсальною підготовкою: володіють сучасними педагогічними та інформаційними технологіями, психологічно готові до роботи з учнями в новій навчально-пізнавальної мережевому середовищі. На жаль, у нашій країні не ведеться підготовка фахівців подібного роду. Інша проблема – інфраструктураінформаційного забезпечення студента в мережах. Питання про те, якою має бути структура і композиція навчального матеріалу залишається відкритим. Поряд з цим ставиться питання про умови доступу до курсів дистанційного навчання. Не вирішено так само питання організації та проведення оцінки знань "дистанційних" учнів. Для його вирішення необхідне створення нормативно-правової бази оцінки знань учнів.

4.2. Демонстрація вивчення елементів сферичної геометрії за допомогою педагогічного програмного засобу easygenerator

У своїй дипломній роботі я працюю над дистанційним підходом до вивчення елементів сферичної геометрії. Я розглядала дистанційний підхід. Сам дистанцій курс включає у себе комплекс навчально-методичних матеріалів та освітніх послуг, створених у віртуальному навчальному середовищі для організації дистанційного навчання на основі інформаційних і комунікаційних технологій. Основними елементами дистанційного курсу є: система навчально-методичних матеріалів та система освітніх послуг, які поділяються за формою і за змістом. Саме це я і використовувала у своїй роботі. Для початку хочу зазначити, що користовувалася для дослідження педагогічний програмний засіб easygenerator.

За допомогою цього педагогічного засобу можна створити дистанційний курс будь- якої дисципліни та на будь яку тему. Я розробляла курс вивчення елементів сферичної геометрії. А зараз розглянемо поступове створення самого курсу та його етапів.

У додатку А вказано тему самого курсу, а також його цілі. На додатку Б продемонстровано поетапне створення курсу. За допомогою «нового пункту» можна легко створити теоретичний матеріал, лекції чи різні приклади завдань для студентів. У додатку В, Г я використовувала теоретичний матеріал елементів сферичної геометрії. Обсяг необмежений, тому для зручності можна використовувати як короткий курс , так і об’ємний за обсягом. У своєму курсі я також використовувала тестові завдання. Сюди я включала і тестові завдання із 2-3 вибором відповідей, а також і більше.(додаток Ґ, Д, Є). На цьому створення дистанційного курсу завершується. На додатку Ж пропонується опублікування Вашого курсу . І лише після цього Ви можете проглянути всі етапи створення курсу та його елементів (додаток І),але , на жаль, вносити корективи після опублікування Ви вже не зможете. На додатку К, Л уже продемонстровано опублікований курс вивчення елементів сферичної геометрії. Також сюди були включені тестові завдання зі шкалою. Вона одразу у 100%(відсотковій) шкалі висвітлює ваші результати (додаток М, Н, П). На додатку Р нашого дистанційного курсу ми переконуємося ,що дана програма не є хибною, оскільки при виборі не вірної відповіді вона одразу вибиває помилку та не зараховує бали на шкалі підрахунку. На додатках С, Т. можна побачити, що були вибрані правильні відповіді і програма одразу їх підтвердила із внесенням відповідних балів до шкали підрахунку. Додаток У –це завершення проходження тестових завдань із підбиттям підсумків. У кінці курсу я пройшла курс на 100%. Звичайно були помилки і не одна. Але перевагою цього курсу є те, що педагогічний засіб easygenerator одразу вибиває те, що обрана Вами відповідь була не вірна, і це питання у тесті можна пройти ще раз.

Педагогічний програмний засіб easygenerator є досить зручним та має чимало переваг, думаю Ви у цьому вже переконалися.

ВИСНОВОК

За допомогою доступних джерел та літератури обґрунтувала використання сферичної геометрії та геометрії на площині. Розглянула основні поняття сферичної геометрії та зокрема сферичної тригонометрії, сферичних трикутників, полярних трикутників та їх особливості та розглянула різні види задач, пов’язаних із сферичною геометрією.

Коли мова йде про дистанційне навчанні слід розуміти наявність у системі вчителя, підручника і учня. Ця взаємодія вчителя та учнів. Звідси випливає, що головним при організації дистанційної форми навчання є створення електронних курсів, розробка дидактичних основ дистанційного навчання, підготовка педагогів-координаторів. Не слід ототожнювати дистанційну форму з заочною формою навчання, бо тут передбачається постійний контакт з викладачем, з іншими учнями кіберкласса, імітація всіх видів очного навчання, але специфічними формами.

Отже, потрібні теоретичні проробки, експериментальні перевірки, серйозні науково-дослідні роботи. На жаль, те, що ми сьогодні бачимо в Інтернеті і в більшості своїй на компакт-дисках, ніяк не відповідає елементарним педагогічним вимогам. Звідси значущість проблеми, пов'язаної з розробкою самих курсів дистанційного навчання та методикою їх використання для різних цілей базового, поглибленого, додаткової освіти.

За допомого педагогічного програмного засобу easygenerator у своїй дипломній роботі «Компентентнісний підхід до вивчення елементів сферичної геометрії» я продемонструвала розробку дистанційного курсу елементів сферичної геометрії. Процес створення є не досить важким та доступний кожному. Створення та проходження курсів дистанційного навчання вважається необхідним для розвитку кваліфікованого, інтелектуального, високо професійного і просто здорового суспільства.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія.-Х.:Основа, 1993.- 192 с.

2. Волынский Б.А. Сферическаятригонометрия.-М.:Наука, 1993.-192 с.

3. Кашкаха В.Е., Откидач В.В. сферическая тригонометрія и вычеслительныеметоды в маркшейдерскомделе.-Донецк: ДонГУ, 1984.-112 с.

4. Кранц П. Сферическаятригонометрия.- М.: URSS.ЛКИ, 2007.-93 с.

5. Матвиевская Г.П. Становлениеплоской и сферическойтригонометрии. Изматематическихидей. – М.: Знание, 1982.- 64 с.

6. Пандул И.С. Сферическаятригонометрия и сферическаяастрономияприменительно к решениюинженерно – геодезических задач. – Л.: ЛГИ,
1982.-99 с.

7. Сандраков П.В. Решениесферическихтреугольников.- Пермъ: ПермПИ, 1970. – 81с.

8. Тарасенкова Н.А., Петрова Є.В. Вступ до сферичної геометрії.- Черкаси: ЧНУ, 2008.-80 с.

9. Основи сферичної геометрії [Електронний ресурс]. –режим доступу до сторінки :http://eprints.kname.edu.ua.

10. М. П. Данилевський М. П., Колосов А. І., Якунін А. В. Основисферичноїгеометрії та тригонометрії – Навчальнийпосібник. – Х., 2011.- 94 с.

11. Околесов О. П. Системний підхід до побудови електронного курсадля дистанційного навчання / / Педагогіка. -1999. - № 6. -С. 50-56.

12. Полат Е. С. Петров А.Є. Дистанційне навчання: яким йому бути? / / Педагогіка. - 1999. - № 7. -С. 29-34.

13. Підкасистий П.І. Тищенко О.Б. Комп'ютерні технології в системі дистанційного навчання / / Педагогіка. -2000. - № 5. -С. 7-12.

14. Система дистанційного навчання: [Електронний ресурс].- Режим доступу до сторінки: http: // www.