Сверчевська І.А.,
доцент кафедри алгебри та геометрії
го державного університету
імені Івана Франка

Розв'язування рівнянь – одна з провідних змістових ліній шкільного курсу математики. Вміння розв’язувати рівняння розвиваються в процесі практичного ознайомлення з різними методами виконання таких задач. Тому в першій частині статті ми розглядаємо різні підходи до розв’язування квадратних рівнянь, які виникли в історії математики: словесне розв’язання, коли ще не було математичної символіки; геометричне розв’язання, що дає можливість наочно побудувати корінь рівняння; різні тотожні перетворення, в результаті яких рівняння розв’язується без застосування формули; деякі підстановки, що зводять квадратне рівняння до рівняння з двома змінними. Кожний з методів має свої переваги, які корисно зрозуміти та оцінити.

У другій частині розглядаються рівняння вищих степенів. У більшості історичних задач пропонуються різні авторські підходи щодо перетворення даних рівнянь до вигляду, коли можна використати метод розкладу на множники. В ряді задач пропонуються різні підстановки, які зводять дане рівняння до рівняння, степінь якого нижче.

У третій частині наведено деякі знахідки математиків минулих часів, які дають можливість знайти корені рівнянь підвищеної складності нетрадиційними методами.

I. Авторські методи розв’язування квадратних рівнянь

1) **Задача ал-Хорезмі**

Ал-Хорезмі (Мухаммед бен-Муса) (IX ст.) – узбецький математик. Найбільше значення мала праця Хорезмі з алгебри "Китаб ал-джебр ал-мукбала" ("Книга про відновлення і протиставлення"), в якій алгебра вперше розглядається як самостійна галузь математики [1:507].

Розв'язати рівняння "Квадрат і число 21 дорівнює десяти кореням". У сучасних позначеннях: $x^2 + 21 = 10x$.

Авторське розв’язання [2:119].

"Поділи надвоє число коренів, одержиш 5, помнож 5 саме на себе, одержиш 25, від добутку відніми 21, залишається 4. Здобудь корінь з 4, одержиш 2. Відніми 2 від 5, одержиш 3. Це 3 є шуканий корінь. Або ж додай 2 до 5, що дасть 7, це теж є корінь".

У сучасних позначеннях маємо: $x = 5 \mp \sqrt{5^2 - 21} = 5 \mp \sqrt{4} = 5 \mp 2$, $x_1 = 3,\ x_2 = 7$.

Тобто використана формула для коренів квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$: $x = -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

2) **<u>Задача ал-Кархі</u>**

Ал-Кархі (Ал-Караджі) (помер 1016) – іранський математик. Автор двох трактатів з арифметики та алгебри, де дано розв'язання 250 алгебраїчних задач і задач на невизначені рівняння [1:214].

Розв'язати рівняння $x^2 + 10x = 39$ [2:24].

Ал-Кархі шукає число, яке потрібно додати до $x^2 + 10x$, щоб одержався повний квадрат, таким числом є 25. Маємо: $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$, $(x+5)^2 = 64$, $x + 5 = 8$, $x = 3$. Він називає цей спосіб "методом розв'язування на зразок Діофанта". Від'ємний корінь Ал-Кархі не розглядає.

3) **<u>Задача Омара Хайяма</u>**

Омар Хайям (1048 – 1131) – персидський математик, філософ і поет. Він першим створив теорію розв'язування рівнянь до третього степеня включно, здійснив глибокі геометричні дослідження. Хайям здобув славу як поет, майстер рубаї [1:500].

Розв'язати рівняння $\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$.

Розв'язання Хайяма [2:162].

Позначимо $\frac{1}{x} = y$, тоді $y^2 + 2y = \frac{5}{4}$. Додамо до обох частин одиницю $y^2 + 2y + 1 = \frac{9}{4}$, $(y+1)^2 = \frac{9}{4}$. Звідки $y + 1 = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Маємо $x = 2$.

Від'ємний корінь автор не розглядає.

4) **<u>Задача Бхаскари</u>**

Бхаскара (1114 – 1178) – індійський математик і астроном. Автор праці "Вінок систем", де викладено методи розв'язування ряду алгебраїчних задач [1:79].

Розв'язати в загальному вигляді квадратне рівняння $ax^2 + bx = c$ [2:24].

Розв'язання автора.

Помножимо обидві частини рівняння на $4a$. Маємо $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$. Додамо до обох частин b^2. Перетворюємо $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac$, $(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac$, $2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$, $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$.

Відносно від'ємних значень коренів Бхаскара зауважує, що "люди не схвалюють абстрактних від'ємних чисел".

5) **<u>Задача Кардано</u>**

Кардано (1501 – 1576) – італійський математик, філософ і лікар. З іменем Кардано пов'язують формулу для коренів кубічного рівняння. Кардано першим допускав від'ємні корені рівняння [1:215].

Знайти побудовою додатній корінь рівняння $x^2 + 6x = 91$ [3:46].

Розв’язання Кардано.

"Нехай квадрат FD (рис. 1) є x^2, отже, його сторона $FH = x$. $DG = DB = 3$ (половині коефіцієнта при x). Побудуємо квадрат AFEC. Прямокутник AD рівний прямокутнику DE, тобто рівний $3x$. Сума квадрата FD і двох цих прямокутників рівна $x^2 + 6x$, що, за умовою, дорівнює 91. Малий квадрат BCGD дорівнює 9, отже, квадрат AFEC = 100. Отже, $AC = 10$, але $AC = x + 3$ звідки $x = 7$".

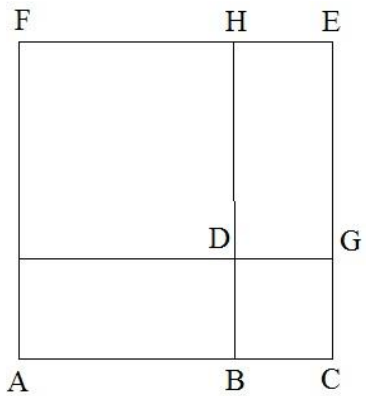

Рис. 1

Сучасне розв’язання: $x^2 + 6x - 91 = 0$, $x = -3 \mp \sqrt{9 + 91} = -3 \mp 10$, $x_1 = -13$, $x_2 = 7$.

6) **<u>Задача Вієта</u>**

Франсуа Вієт (1540 – 1603) – французький математик, "батько алгебри". У працях Вієта алгебра стала загальною наукою про алгебраїчні рівняння, яка ґрунтується на символічних позначеннях [1:101].

Розв’язати рівняння $x^2 + px + q = 0$ підстановкою $x = y + z$ [2:44].

Авторське розв'язання.

В даному рівнянні $x^2 + px + q = 0$ покладемо $x = y + z$. Тоді $x^2 = y^2 + 2yz + z^2$, тому рівняння набуде вигляду: $y^2 + y(2z + p) + z^2 + pz + q = 0$. Виберемо z так, щоб коефіцієнт при y в першому степені дорівнював нулю, тобто $2z + p = 0$. Тоді $z = -\frac{p}{2}$ і $z^2 + pz + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = q - \frac{p^2}{4}$. Отже, рівняння буде мати вигляд $y^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0$, $y^2 = \frac{p^2}{4} - q$. Звідки $y = \mp\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Оскільки $x = y + z$ і $z = -\frac{p}{2}$, то $x = -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

II. Варіативність підходів до розв'язування рівнянь вищих степенів

1) **Задачі ал-Кархі** [3:31]

Розв'язати рівняння $x^4 + 5x^2 = 126$ (1), $x^2 + 5 = y^2$ (2), $x^2 - 10 = y^2$ (3).

За допомогою підстановки $x^2 = z$ Ал-Кархі зводить рівняння (1) до квадратного $z^2 + 5z = 126$, $z_1 = 9$, $z_2 = -14$. Тоді $x^2 = 9$, $x = 3$. Від'ємні корені Ал-Кархі не розглядає.

Для рівняння (2) Ал-Кархі пропонує підстановку $y = x + 1$, тоді $x^2 + 5 = x^2 + 2x + 1$, $2x = 4$, $x = 2$, $y = 3$. Тобто він визначає один з безлічі коренів.

Для рівняння (3) Ал-Кархі пропонує підстановку $y = x - 1$, тоді $x^2 - 10 = x^2 - 2x + 1$, $2x = 11$, $x = 5{,}5$, $y = 4{,}5$.

2) **Задача Бхаскари**

Розв'язати рівняння $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$ [2:24].

Розв'язання. $x^4 - 11x^2 + 11x^2 - 121x^2 + 119x^2 - 1309x + 909x - 9999 = 0$,
$(x^4 - 11x^2) + (11x^2 - 121x^2) + (119x^2 - 1309x) + (909x - 9999) = 0$,
$x^3(x - 11) + 11x^2(x - 11) + 119x(x - 11) + 909(x - 11) = 0$,
$(x - 11)(x^3 + 11x^2 + 119x + 909) = 0$. Одержуємо два рівняння $x - 11 = 0$ і $x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0$. З першого маємо $x_1 = 11$ (цей корінь дає Бхаскара). З другого рівняння одержуємо три корені, які Бхаскара не розглядає.

Розв'яжемо друге рівняння $x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0$.

$x^3+9x^2+2x^2+18x+101x+909=0$, $x^2(x+9)+2x(x+9)+101\cdot(x+9)=0$, $(x+9)(x^2+2x+101)=0$, $x+9=0,\ x_2=-9$. Рівняння $x^2+2x+101=0$ має два комплексні корені x_3, x_4.

3) **<u>Задача Луки Пачоллі</u>**

Лука Пачоллі (1454 – 1514) – італійський математик. Його праці з геометрії написані під впливом Леонардо да Вінчі, особливо твір "Божественне відношення" [1:374].

Розв'язати рівняння $x^4+2x^3+3x^2+2x-81600=0$ [3:42].

Авторське розв’язання.

$x^4+2x^3+2x^2+x^2+2x+1=81601,\ (x^2+x+1)^2=81601,$

$x^2+x+1-\sqrt{81601}=0,\ x=-\frac{1}{2}\mp\sqrt{\frac{1}{4}-1+\sqrt{81601}}=-\frac{1}{2}\mp\sqrt{\sqrt{81601}-\frac{3}{4}}$.

Випадок $x^2+x+1+\sqrt{81601}=0$ Пачоллі не розглядає.

4) **<u>Задача Кардано</u>**

Розв'язати рівняння $13x^2=x^4+2x^3+2x+1$ [3:46].

Кардано до обох частин додає $3x^2$. Тоді $16x^2=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$, $16x^2=x^4+2x^3+2x^2+x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$, $4x=x^2+x+1$, $x^2-3x+1=0$, $x=\frac{3}{2}\mp\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Кардано визначає тільки ці два корені. Ще два корені знайдемо з рівняння $-4x=x^2+x+1,\ x^2+5x+1=0,\ x=-\frac{5}{2}\mp\frac{\sqrt{21}}{2}$.

5) **<u>Задача Рафаеля Бомбеллі</u>**

РафаельБомбеллі (бл. 1530 – бл. 1572) – італійський математик та інженер. В "Алгебрі" Бомбеллі дано перший виклад дій над уявними числами. Він удосконалив правила дій над раціональними числами [1:63].

Розв'язати рівняння $x^3=15x+4$ [3:47].

Авторське розв’язання.

$x^3-15x-4=0$, $x^3-4x^2+4x^2-16x+x-4=0$, $(x^3-4x^2)+(4x^2-16x)+(x-4)=0$, $(x-4)(x^2+4x+1)=0$, $x-4=0,\ x_1=4$, $x^2+4x+1=0,\ x_{2,3}=-2\mp\sqrt{3}$.

6) **<u>Задачі Стевіна</u>**

Сімон Стевін (1548 – 1620) – нідерландський інженер і математик. Він першим в Європі виклав десяткову систему мір і десяткові дроби, ввів від'ємні корені рівнянь [1:450].

Розв'язати рівняння $x^3 = 6x + 40$ (1), $x^9 = 3x^6 + 5x^3$ (2) [3:48].

Авторське розв’язання рівняння (1).

$x^3 - 6x - 40 = 0$, $x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 10x - 40 = 0$,
$x^2(x-4) + 4x(x-4) + 10(x-4) = 0$, $(x-4)(x^2 + 4x + 10) = 0$, $x - 4 = 0$, $x_1 = 4$,
$x^2 + 4x + 10 = 0$, $x_{2,3} = -2 \mp \sqrt{-6} = -2 \mp i\sqrt{6}$.

Авторське розв’язання рівняння (2).

$x^9 - 3x^6 - 5x^3 = 0$, $x^3(x^6 - 3x^3 - 5) = 0$, $x^3 = 0$, $x_{1,2,3} = 0$, $x^6 - 3x^3 - 5 = 0$,
$x^3 = z$, $z^2 - 3z - 5 = 0$, $z = \frac{3 \mp \sqrt{29}}{2}$, $x_{4,5,6} = \sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{29}}{2}}$, $x_{7,8,9} = \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{29}}{2}}$.

7) **<u>Задача Гарріота</u>**

Томас Гарріот (1560 – 1621) – англійський математик і географ. Зробив внесок у розвиток алгебраїчної символіки. Гарріот помітив, що число коренів рівняння визначається його степенем [1:121].

Розв'язати рівняння $52 = -3x + x^3$ [3:47].

Авторське розв’язання.

$x^3 - 3x - 52 = 0$, $x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 13x - 52 = 0$,
$(x^3 - 4x^2) + (4x^2 - 16x) + (13x - 52) = 0$, $x^2(x-4) + 4x(x-4) + 13(x-4) = 0$,
$(x-4)(x^2 + 4x + 13) = 0$, $x - 4 = 0$, $x_1 = 4$, $x^2 + 4x + 13 = 0$,
$x_{2,3} = -2 \mp \sqrt{-9} = -2 \mp 3i$.

8) **<u>Задача Кеплера</u>**

Йоган Кеплер (1571 – 1630) – німецький астроном і математик. Відкрив закони руху планет і був одним з попередників творців математичного аналізу нескінченно малих. Кеплер запропонував спосіб визначення об’ємів діжок, який поширив на визначення об’ємів тіл обертання [1:224].

Розв'язати рівняння $5x - 5x^3 + x^5 = 0$ [3:47].

Авторське розв’язання.

$x(x^4 - 5x^2 + 5) = 0$, $x_1 = 0$, $x^4 - 5x^2 + 5 = 0$, $x^2 = z$, $z^2 - 5z + 5 = 0$,
$z = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2}$, $x_{2,3} = \mp\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, $x_{4,5} = \mp\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

9) **<u>Задачі Жірара</u>**

Альберт Жірар (1595 – 1632) – голландський математик. Він вперше сформулював основну теорему алгебри про кількість коренів алгебраїчного рівняння, дав геометричну інтерпретацію від'ємних коренів, вважав нуль коренем рівняння, розглядав уявні корені [1:196].

Розв'язати рівняння $x^3 = 13x + 12$ (1), $x^4 - 4x + 3 = 0$ (2) [3:47].

Авторське розв’язання рівняння (1): $x^3-13x-12=0$, $x^3-4x^2+4x^2-16x+3x-12=0$, $\left(x^3-4x^2\right)+\left(4x^2-16x\right)+(3x-12)=0$, $x^2(x-4)+4x(x-4)+3(x-4)=0$, $(x-4)\left(x^2+4x+3\right)=0$, $x-4=0,\ x_1=4$, $x^2+4x+3=0$, $x_2=-1, x_3=-3$.

Авторське розв’язання рівняння (2): $x^4-x^3+x^3-x^2+x^2-x-3x+3=0$, $\left(x^4-x^3\right)+\left(x^3-x^2\right)+\left(x^2-x\right)-(3x-3)=0$, $x^3(x-1)+x^2(x-1)++x(x-1)-3(x-1)=0$, $(x-1)\left(x^3+x^2+x-3\right)=0$, $x-1=0,\ x_1=1$, $x^3+x^2+x-3=0$, $x^3-x^2+2x^2-2x+3x-3=0$, $\left(x^3-x^2\right)+\left(2x^2-2x\right)+(3x-3)=0$, $x^2(x-1)+2x(x-1)+3(x-1)=0$, $x-1=0,\ x_2=1,\ x^2+2x+3=0,\ x_{3,4}=-1\mp\sqrt{-2}=-1\mp i\sqrt{2}$.

10) **<u>Задачі Декарта</u>**

Рене Декарт (1596 – 1650) – французький математик, філософ, фізик. Декарт уперше в науці ввів поняття змінної величини і функції. Декарт першим почав досліджувати властивості рівнянь, сформулював твердження, що кількість дійсних і комплексних коренів рівняння дорівнює його степеню. Він заклав основи аналітичної геометрії [1:163].

Розв'язати рівняння $y^3-8y^2-y+8=0(1)$, $y^3-9y^2+26y-24=0$ (2), $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0(3)$ [2:46].

Авторське розв’язання рівняння (1): $y^3-8y^2-y+8=0$, $y^2(y-8)-(y-8)=0$, $(y-8)\left(y^2-1\right)=0$, $y-8=0,\ y_1=8,\ y^2-1=0,\ y_{2,3}=\mp1$.

Декарт подає рівняння (2) $y^3-9y^2+26y-24=0$ в такому вигляді: $y^3-2y^2-7y^2+14y+12y-24=0$, $\left(y^3-2y^2\right)+\left(-7y^2+14y\right)+(12y-24)=0$, $y^2(y-2)-7y(y-2)+12(y-2)=0$, $(y-2)\left(y^2-7y+12\right)=0$, $y-2=0,\ y_1=2$, $y^2-7y+12=0,\ y_2=4,\ y_3=3$.

Подамо рівняння (3) $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$ в іншому вигляді $x^4-4x^3-19x^2+76x+30x-120=0$, $x^3(x-4)-19x(x-4)+30(x-4)=0$, $(x-4)\left(x^3-19x+30\right)=0$, $y-4=0,\ y_1=4$, $x^3-19x+30=0$. Перетворимо це рівняння $x^3-3x^2+3x^2-9x-10x+30=0$, $x^2(x-3)+3x(x-3)-10(x-3)=0$, $(x-3)\left(x^2+3x-10\right)=0,\ x-3=0,\ x_2=3,\ x^2+3x-10=0,\ x_3=2,\ x_4=-5$.

11) **<u>Задача Маклорена</u>**

Колін Маклорен (1698 – 1746) – шотландський математик. Маклорен здобув славу працями з аналізу, вперше опублікував працю про розклад функцій *у степеневі ряди. У його трактаті з алгебри використовується символіка, що мало відрізняється від сучасної* [1:216].

Розв'язати рівняння $x^6 - 19x^3 = 216$ [3:51].

Розв'язання Маклорена.

$$x^3 = z, \quad z^2 - 19z = 216, \quad z^2 - 19z + \frac{361}{4} = 216 + \frac{361}{4}, \quad \left(z - \frac{19}{2}\right)^2 = \frac{1225}{4},$$

$$z - \frac{19}{2} = \mp\frac{35}{2},\ z = \frac{19 \mp 35}{2},\ z_1 = -8,\ z_2 = 27,\ x = \sqrt[3]{z},\ x = -2,\ x = 3.$$

Інші чотири комплексні корені Маклорен не шукає.

12) **<u>Задача Монферр</u>’<u>є</u>**

Монферрьє – французький математик, автор ряду підручників з математики, виданих у 3-х томах (1838 р.) [3:196].

Розв'язати рівняння $x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 35x - 28 = 0$ [3:60].

Авторське розв’язання. $x^4 + x^3 + 4x^3 + 4x^2 - 7x^2 - 7x - 28x - 28 = 0$, $\left(x^4 + x^3\right) + \left(4x^3 + 4x^2\right) - \left(7x^2 + 7x\right) - (28x + 28) = 0$,

$x^3(x+1) + 4x^2(x+1) - 7x(x+1) - 28(x+1) = 0$, $(x+1)\left(x^3 + 4x^2 - 7x - 28\right) = 0$,

$x + 1 = 0,\ x_1 = -1,\ x^3 + 4x^2 - 7x - 28 = 0,\ x^2(x+4) - 7(x+4) = 0,\ (x+4)\left(x^2 - 7\right) = 0$

$x + 4 = 0,\ x_2 = -4,\ x^2 - 7 = 0,\ x_{3,4} = \mp\sqrt{7}$.

III. Нестандартні методи розв’язування деяких рівнянь

1) **<u>Задача Омара Хайяма</u>**

Розв'язати рівняння $x^3 + a = cx^2$ [4:54].

Автор розв’язує це рівняння за допомогою побудови параболи $y^2 = \sqrt[3]{a}(c - x)$ та гіперболи $xy = \sqrt[3]{a^2}$, знаходячи точку перетину цих кривих. Зробимо перетворення даного рівняння, що приводить до рівнянь вказаних кривих. $x^3 + a = cx^2$, $cx^2 - x^3 = a$, $x^2(c - x) = a$, $x^2 \cdot \sqrt[3]{a}(c - x) = \sqrt[3]{a^4}$.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a}(c - x) = y^2 \\ x^2 y^2 = \sqrt[3]{a^4} \end{cases}, \quad \begin{cases} y^2 = \sqrt[3]{a}(c - x) - \text{ парабола} \\ xy = \sqrt[3]{a^2} - \text{ гіпербола} \end{cases}$$

2) **<u>Задача Бхаскари</u>**

Розв'язати в раціональних числах рівняння $ax + by + c = xy$ [2:24].

Розв'язання автора.

$ax + by + c = xy$, $c = xy - ax - by$. Додамо ab: $c + ab = xy - ax - by + ab$, $c + ab = (xy - by) - (ax - ab)$, $ab + c = y(x - b) - a(x - b)$, $ab + c = (x - b)(y - a)$. Бхаскара зауважує, що у випадку раціональних x та y потрібно покласти

$x = b + n$, тоді визначається y. $ab + c = (b + n - b)(y - a)$, $ab + c = n(y - a)$, $y - a = \frac{ab + c}{n}$, $y = a + \frac{ab + c}{n}$.

Відповідь: $x = b + n$, $y = a + \frac{ab + c}{n}$, $n \in N$.

3) **Задачі Фібоначчі**

Леонардо Пізанський (Фібоначчі) (бл. 1170 – після 1228) – італійський математик. За його книгою "Книга про абак" навчалося багато європейських математиків, зокрема вивчили індійську позиційну систему числення. Він розробляв питання, пов'язані з числами Фібоначчі [1:289].

Розв'язати рівняння:

$x + \sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{5x^2} = 10$ (1),

$3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4$ (2) [3:38].

Авторське розв'язання рівняння (1) $x + \sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{5x^2} = 10$.

$\left(x + \sqrt{5x^2}\right) + \left(\sqrt{x} + \sqrt{2x}\right) - 10 = 0$, $x\left(1 + \sqrt{5}\right) + \sqrt{x}\left(1 + \sqrt{2}\right) - 10 = 0$, $\sqrt{x} = y$, $\left(1 + \sqrt{5}\right)y^2 + \left(1 + \sqrt{2}\right)y - 10 = 0$. Одержується квадратне рівняння, яке можна розв'язати.

$$y = \frac{-\left(1 + \sqrt{2}\right) \mp \sqrt{\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 + 40\left(1 + \sqrt{5}\right)}}{2\left(1 + \sqrt{5}\right)} = \frac{-\left(1 + \sqrt{2}\right) \mp \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 40 + 40\sqrt{5}}}{2\left(1 + \sqrt{5}\right)}$$

$$y = \frac{-\left(1 + \sqrt{2}\right) \mp \sqrt{2\sqrt{2} + 40\sqrt{5} + 43}}{2\left(1 + \sqrt{5}\right)}.$$

$$x = \left(\frac{-\left(1 + \sqrt{2}\right) \mp \sqrt{2\sqrt{2} + 40\sqrt{5} + 43}}{2\left(1 + \sqrt{5}\right)}\right)^2 = \frac{\left(-1 - \sqrt{2} \mp \sqrt{2\sqrt{2} + 40\sqrt{5} + 43}\right)^2}{4\left(1 + \sqrt{5}\right)^2}$$

Щоб розв'язати рівняння (2) $3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4$ Леонардо покладає $y = \sqrt{x^2 - 3x}$. Тоді $4\sqrt{x^2 - 3x} = \left(x^2 - 3x\right) + 4$, $4y = y^2 + 4$ і $y = 2$. Звідки $2 = \sqrt{x^2 - 3x}$, $x^2 - 3x = 4$, $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

4) **Задачі Монферр'є**

Розв'язати рівняння $a^{b^x} = c$ (1), $x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$ (2) [3:60].

Розв'язання рівняння (1).

Нехай $b^x = z$, $a^z = c$, $z\,lg\,a = lg\,c$, $z = \frac{lg\,c}{lg\,a} = m$, $b^x = m$, $x\,lg\,b = lg\,m$,

$$x = \frac{lg\,m}{lg\,b} = \frac{lg\left(\frac{lg\,c}{lg\,a}\right)}{lg\,b}.$$

Розв'язання рівняння (2) $x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$. Автор помічає, що $x_1 = 1$ задовольняє рівняння і, розділивши дане рівняння на $x - 1$, одержує зворотне рівняння непарного степеня $x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$. Перетворює його $\left(x^5 + 1\right) + \left(4x^4 + 4x\right) + \left(6x^3 + 6x^2\right) = 0$, $\left(x^5 + 1\right) + 4x\left(x^3 + 1\right) + 6x(x + 1) = 0$. Тоді очевидно, що $x_2 = -1$ і, розділивши рівняння $x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$ на $x + 1$, одержує зворотне рівняння парного степеня $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$, яке ділить на x^2. Отримує $x^2 + 3x + 3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$. Робить підстановку $x + \frac{1}{x} = z$, звідки $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = z^2$, $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$. Приходить до квадратного рівняння $z^2 - 2 + 3z + 3 = 0$, $z^2 + 3z + 1 = 0$, $z_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{5}}{2}$. Тоді $x + \frac{1}{x} = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ або $x + \frac{1}{x} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$, тобто розв’язуються квадратні рівняння $x^2 - \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)x + 1 = 0$, $x^2 - \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)x + 1 = 0$. Отримано корені $x_{3,4} = \frac{-3 - \sqrt{5} \mp \sqrt{-2 + 6\sqrt{5}}}{4}$, $x_{5,6} = \frac{-3 + \sqrt{5} \mp \sqrt{-2 - 6\sqrt{5}}}{4}$.

5) **Задача Бертрана**

Франсуа Бертран (1822 – 1900) – французький математик, який був людиною з "безперервним математичним мисленням". Він встановив деякі спеціальні ознаки збіжності числових рядів, висловив гіпотезу, що "між числами n *і* $2n - 2$, $n \ge 4$ *лежить принаймні одне просте число"* [1:49].

Розв'язати рівняння $\sqrt[m]{(1 + x)^2} - \sqrt[m]{(1 - x)^2} = \sqrt[m]{1 - x^2}$ [3:61].

Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt[m]{1-x^2}$, тоді $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt[m]{\frac{1-x}{1+x}}=1.$ Покладаємо $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}=z$, тоді $z+\frac{1}{z}=1$, $z^2-z-1=0$, $z=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$. Невідоме x визначається з рівності $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$.

Для збудження інтересу до математики до кожної визначної задачі пропонується історична довідка, дається посилання на літературу. Після ознайомлення з авторськими методами розв'язування рівнянь, учні можуть запропонувати свої методи. Знайомство з визначними історичними задачами допомагає зрозуміти, як розвивалась математика і яка роль самих математиків, познайомитися з їх методами та ідеями, які часто є незвичними і красивими.

Література

1. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К.: Вища шк. , 1973. – 552 с.
2. Чистяков В. Д. Старинные задачи по элементарной математики. – Минск: Высшая шк., 1978. – 270 с.
3. Попов Г.Н. Сборник исторических задач по элементарной математике / Г.Н. Попов. – М.-Л.: ОНТИ, 1938. – 216 с.
4. Бевз В.Г. Практикум з історії математики / В.Г. Бевз. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004 – 312 с.