Т. В. Дідківська,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
І. А. Сверчевська,
кандидат педагогічних наук, доцент
(Житомирський державний університет імені Івана Франка)

Варіативність методів доведення математичних тверджень у формуванні математичних компетентностей майбутнього фахівця

Постановка проблеми. Ми шукаємо можливості формування математичних компетентностей засобами історії математики. При цьому виділяємо визначні історичні твердження і методи їх доведення. На нашу думку, дослідження різних підходів до доведення вдосконалює уміння діяти на основі одержаних знань, здійснювати дедуктивні методи доведень тверджень, досліджувати ефективність різних методів. Практична діяльність у процесі доведення математичних тверджень різними методами формує володіння цими методами і подальше їх використання при навчанні математики.

Метою публікації є розгляд історії математики як засобу формування математичних компетентностей при вивченні курсу алгебри майбутніми вчителями математики.

Виклад основного матеріалу.

1. **Твердження Піфагора** (близько 580 – 500 до н.е.). [1:11].

Сума довільного числа послідовних непарних чисел, починаючи з одиниці, є точний квадрат.

Піфагор доводив це твердження геометрично за допомогою побудови "гномонів". Твердження можна довести, застосувавши формулу суми арифметичної прогресії, або методом математичної індукції.

2. **Твердження Архімеда** (близько 287 – 212 до н.е.). [1:13].

Знайти суму квадратів n перших чисел натурального ряду, тобто довести $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

У Архімеда ця задача розв’язується в геометричній формі. Для визначення потрібної суми можна використати тотожність $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$, надавши n значення 1, 2, 3, … , n і додавши одержані рівності. Доцільно також використати метод математичної індукції.

3. **Довести**, що сума кубів перших n натуральних чисел дорівнює квадрату суми цих чисел: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$ [2:25].

До цієї задачі в історії математики поверталися математики різних часів. Індійський математик Апастамба (IV або V ст. до н. е.) – автор трактату "Сульва-сутри", який є найстародавнішою пам’яткою індійської математики. Він знав правило обчислення суми кубів чисел натурального ряду на геометричній основі.

У I ст. цю формулу довів видатний індійський математик Аріабхата I (476 – 550). Його діяльність відкриває золоте століття індійської математики. В трактаті "Арабхатіам", написаному у віршах, він наводить правила сумування рядів трикутних, квадратних та кубічних чисел.

Давньогрецький математик Нікомах з Герази жив між 30 і 150 роках до н. е., відомий як автор "Вступу до арифметики". Найбільш цікавим у цій книзі є сумування числових рядів, доведення, що кубічні числа є сумою послідовних непарних чисел. Так $1^3=1$, $2^3=3+5$, $3^3=7+9+11$ тощо. Це твердження пізніше було використане для визначення суми кубів перших натуральних чисел.

В уривку з Арцерианського кодексу (римський рукопис VI або VII століття), який приписують римським геометрам Епафродиту та Вітрувію Руфу, сумуються куби натуральних чисел. При розв’язанні використовується твердження Нікомаха: куб числа n є сума послідовних непарних чисел від $\left(n^2-n+1\right)$ до $\left(n^2-n+(2n-1)\right)$ [1:18].

На початку XI ст. з’явилися твори багдадського математика ал-Караджи. В алгебраїчному трактаті "Аль-Фархі" наводяться вирази для суми квадратів і суми кубів натурального ряду чисел.

До традиційного методу математичної індукції доведення даного твердження ми додаємо ще рекурентний метод, що ґрунтується на тотожності $n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$.

4. **Твердження Ібн-ал-Хайсама** (965 – 1039). [2: 31].

Знайти суму четвертих степенів n перших натуральних чисел, тобто довести $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}\left(6n^5+15n^4+10n^3-n\right)$.

Для знаходження формули суми четвертих степенів перших n натуральних чисел можна застосувати тотожність $n^5-(n-1)^5=5n^4-10n^3+10n^2-5n+1$ або метод математичної індукції.

Висновки. При сумуванні степенів послідовних натуральних чисел ми запропонували різні методи. Надалі доцільно вибрати найбільш ефективні методи і довести формули для суми вищих степенів. Також дослідити можливості застосування запропонованих методів для обчислення нескінченних сум.

Список використаних джерел та літератури

1. Попов Г.Н. Сборник исторических задач по элементарной математике / Г.Н. Попов. – М.-Л.: ОНТИ, 1938. – 216 с.
2. Баврин И.И., Фрибус Е.А. Старинные задачи / И.И. Баврин, Е.А. Фрибус. – М.: Просвещение, 1994. – 128 с.

Summary. Didkivska T.V., Sverchevska I.A.

Variability of mathematical statements proof methods in development of mathematical competences in future teachers of mathematics

The opportunities of mathematical competences development using the history of mathematics is researched. Among different approaches to the use of history of mathematics we chose famous statements which contain calculation sums of powers of natural series. We recommend using of various methods, which make a proof more illustrative, more interesting and understandable.

Pythagoras of Samos, Ionian Greek philosopher and mathematician (c. 580 – c. 500 BC), gives the finding of sum of odd numbers $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$. The following proof methods are considered:

1) Pythagoras' gnomon;

2) mathematical induction;

3) using the $1+3+\ldots+(2n-1)=\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n=n^2$ identity.

Method of calculation of sum of the second powers was advised by Archimedes, Ancient Greek mathematician, physicist and engineer (c. 287 BC – c. 212 BC). $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. We focus on the following proof methods:

1) geometric method of Archimedes;

2) using the $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$ identity;

3) mathematical induction .

Calculation of sum of the third powers of natural numbers was investigated by Indian mathematicians Apastamba (c. 400 BC), who used gnomon, Aryabhata I (476 – 550 CE) and other mathematicians. In the 1st century this problem was solved by Nicomachus, Greek mathematician, and by Roman geometers in the 6th or 7th century. In the early 11th century, Al-Karaji, Baghdadian mathematician, gave geometric proof of formula for sum of cubes of natural numbers. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. The following proof methods are considered: 1) Apastamba's gnomon; 2) using the statement of Nicomachus $n^3=(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+\ldots+(n^2-n+(2n-1))$; 3) using the $n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$ identity; 4) geometric proof of Al-Karaji; 5) mathematical induction.

Lastly we consider the formula for sum of the fourth powers $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}\left(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n\right)$. We focus on the following proof methods: 1) using the $n^5 - (n-1)^5 = 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1$ identity; 2) mathematical induction.