

# ДО ПИТАНЬ МЕТОДИЧНОЇ СИСТЕМИ РОБОТИ ВЧИТЕЛЯ ІЗ ЗДІБНИМИ ТА ОБДАРОВАНИМИ З МАТЕМАТИКИ УЧНЯМИ ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

С.П. Семенець, викладач

Житомирський державний педагогічний інститут ім. І.Я.Франка

При вивченні курсу алгебри і початків аналізу в середній школі, як і в старших класах взагалі, значно зростає необхідність диференційованого підходу. Це пояснюється тим, що направленість інтересів, багаж математичних знань, рівень розвитку учнів у старших класах стають такими різноманітними, що орієнтація вчителя на середнього учня неминуче приводить до недоступності матеріалу для однієї частини учнів, а отже, до затримки їх розвитку, а також до сповільнення розвитку тієї частини учнів, які відносяться до категорій здібних, обдарованих, талановитих.

У зв'язку з цим, система роботи вчителя повинна включати діяльність, що спрямована на своєчасне виявлення здібних, обдарованих, талановитих з математики учнів та залучення їх до роботи гуртків, факультативів, участі у математичних олімпіадах різного рівня, конкурсів на краще розв'язування математичних задач, шкільних наукових конференцій, одним словом, до навчально-пізнавальної діяльності, що відповідає їх "зоні найближчого розвитку".

Зрозуміло, що виникає питання про критерії вибору таких учнів. За такі критерії вчитель може взяти фонд знань і способів дій, якими володіє учень, і степінь складності проблем, які він може розв'язувати самостійно (І.Я. Лернер [1]), а також рівень научуваності, тобто здатності учнів досягти в короткий строк високого рівня засвоєння, що включає ряд якостей розуму: гнучкість, глибину, стійкість, усвідомленість своєї розумової діяльності, самостійність (креативність), тобто якостей, що визначають рівень розвитку продуктивного мислення (З.І. Калмикова [2]).

Доцільно, щоб система роботи вчителя із здібними та обдарованими з математики учнями включала спеціальний відбір матеріалу належного рівня складності і практичної спрямованості, який би розвивав продуктивне мислення і пізнавальний інтерес до математики. Так, одним із важливих завдань курсу алгебри і початків аналізу є систематизація та поглиблення знань учнів про функцію, одного із найфундаментальніших понять всієї математики. У цьому аспекті і розглядаються в 11 класі показникова та логарифмічна функції. При роботі із здібними та обдарованими учнями, наприклад, на факультативах, гуртках можна йти одним із двох шляхів. При першому варіанті викладу увага учнів звертається на те, що функція може бути задана перерахуванням характеристичних властивостей, що є принципово новим, оскільки до сих пір всі основні

функції задавалися оперативно: вказувались операції, які потрібно виконувати над значенням аргументу, щоб одержати відповідне значення функції. Так, показникову функцію із основою  $a$ , визначеною на множині  $\mathbb{R}$ , назовемо функцією, що задовольняє трьома вимогам:

- 1)  $f(1) = a$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- 2) для будь-яких  $x, y \in \mathbb{R}$   $f(x + y) = f(x)f(y)$ ;
- 3)  $f(x)$  – неперервна на  $\mathbb{R}$  функція.

Учні (з допомогою вчителя) показують, що для такої функції:

$$f(n) = a^n, \text{ де } n \in \mathbb{N};$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}}, \text{ де } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$f\left(-\frac{m}{n}\right) = a^{-\frac{m}{n}}, \text{ де } m, n \in \mathbb{N} \text{ і } f(0) = 1.$$

Із проведеного дослідження учні роблять висновок, що властивості 1–3 однозначно визначають функцію, значення якої у всіх раціональних точках обчислюються за формулою  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ). Далі, використовуючи неперервність на множині  $\mathbb{R}$  функції, доводять, що аналітичний вигляд функції такий же, коли  $x$  – ірраціональне число. По закінченню дослідження учні роблять висновок, що функція  $f(x) = a^x$ , де  $x \in \mathbb{R}$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) і тільки вона задовольняє умовам 1–3.

Таким чином, учні знайомляться із ще одним відомим способом означення функції, як функції, що є розв’язком деякого функціонального рівняння (його ще називають характеристичним), а також одним із відомих способів розв’язування функціональних рівнянь – аналітичним (або методом Коші).

При другому варіанті означення показникової функції вчитель звертає увагу учнів на поняття функції як математичної моделі різних явищ природи. При такому підході учнів підводять до того, щоб відшукати, "відкрити" функцію, властивості якої відображають властивості деяких природних процесів. Прикладом може бути така задача. Нехай є колонія клітин. У початковий момент часу кількість клітин приймемо за одиницю ( $f(0) = 1$ ). За одиницю часу кількість клітин збільшується в  $a > 1$  разів ( $f(1) = a$ ). Нехай цією одиницею часу є доба. Як змінюється кількість клітин в залежності від пройденого часу?

Учні, провівши аналогічне дослідження, в’ясовують, що показникова функція і тільки вона, описує вище вказаний природний процес.

Здібним та обдарованим учням корисно запропонувати спробувати довести, що логарифмічну функцію можна означити так:

- 1)  $f(a) = 1$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;

- 2) Для будь-яких  $x, y \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(xy) = f(x) + f(y)$  (характеристичне функціональне рівняння логарифмічної функції);

- 3)  $f(x)$  – неперервна на  $\mathbb{R}_+$  функція.

Потрібно особливо підкреслити, що процес розв’язування функціональних рівнянь – це не проста, цікава, пошукова робота, це фактично

процес "відкриття" деякої функції (чи цілого класу функцій) за її характеристичними властивостями. Це яскравий приклад прикладної значимості методів математики. Адже, ознаючи деякі характеристики природних явищ, можна знайти функцію (математичну модель), що описує цей процес, що дає можливість вивчити та пояснити його. Варто, щоб вчитель при роботі із здібними та обдарованими учнями, вивчаючи курс алгебри і початків аналізу, означне місце відводив функціональним рівнянням, відомим методам їх розв'язування: аналітичному (методу Коші), методу підстановки, методу ітерацій, методу диференціювання та ін. Допільно, щоб тема: "Функціональні рівняння та методи їх розв'язування" увійшла в обов'язковий курс фізико-математичних класів та класів з поглибленим вивченням математики.

Важливим складовим компонентом методичної системи роботи вчителя при роботі із здібними та обдарованими в математики учнями є: доцільне поєднання традиційних методів, організаційних форм і засобів навчання в методами і формами активного навчання, які використовують рівневу та профільну диференціацію.

Практика показує, що із всіх методів проблемного навчання найширшим по використанню у роботі над різним навчальним матеріалом і найефективнішим для активізації розумової діяльності учнів є евристична бесіда. Проте, при роботі вчителя із здібними та обдарованими учнями значно зростає роль дослідницького методу навчання. Так, при вивченні курсу алгебри і початків аналізу цей метод може застосовуватись при пошуках формул для обчислення геометричних величин (площа, об'єм) за допомогою інтеграла, при дослідженні властивостей вивчених елементарних функцій за допомогою похідної, при розв'язуванні задач, рівнянь та нерівностей в параметрах. Важливо, щоб вчитель домагався самостійності учнів при виконанні ними досліджень, розв'язанні задач-проблем. Важливо відмітити, що одним із засобів до досягнення самостійного розв'язування задачі-проблеми є "підказування" – допоміжна задача, більш проста по змісту, але така, що вміщує принцип розв'язування основної задачі. Дослідження Я.О.Пономарьова [3] показали, що підказування до подачі основної задачі не виявляє "навідної" дії на розв'язання останньої. Підказування, зроблені після того, як учні деякий час попрацювали (хоча й безрезультатно) над задачею-проблемою в 50% приводило до успіху. Доведено, що підказування, що зроблені на початку стану руху всередині блокади, максимально ефективні. Блокада – це такий стан, коли неадекватні засоби вичерпані, а новий принцип розв'язування ще не знайдений. Момент блокади являє собою стан максимальної внутрішньої готовності до використання учнем допомоги із сторони вчителя. Внутрішня готовність до педагогічного впливу виникає тоді, коли учень пересвідчився у тому, що у нього немає готових засобів розв'язування

проблеми, хоча він має бажання (ще не втратив) і відчуває принципову можливість її розв'язати, готовий переглянути свої дії. Саме в такі моменти учень ближче всього до самостійного творчого розв'язання і готовий до засвоєння не тільки нового змісту, але і нових форм самоорганізації мислення. Знання цієї закономірності може використовуватись вчителем в якості педагогічного прийому при роботі із здібними та обдарованими учнями.

Значно підвищується роль творчих робіт в математики при роботі із здібними та обдарованими учнями. Зупинимось на найпоширеніших із них.

1. Розв'язування задач і доведення теорем нестандартними способами. Так, при вивченні курсу алгебри і початків аналізу це може бути доведення нерівностей і тотожностей, обчислення границь, деяких сум (сум рядів), розкладання виразів на множники та їх спрощення, дослідження на періодичність функцій за допомогою похідної та інтеграла.

2. Розв'язування задач декількома способами. Наприклад, при розв'язуванні задач на екстремум за допомогою похідної та за допомогою елементарних методів.

3. Складання задач, прикладів самими учнями.

4. Математичні твори. Для здібних та обдарованих учнів при вивченні курсу алгебри і початків аналізу можна назвати такі теми творів:

1) Рівняння і функції.

2) Розвиток числа.

3) Тригонометричні функції та їх властивості.

4) Способи розв'язування ірраціональних рівнянь.

5) Що таке інтеграл?

5. Учнівські наукові роботи в математики. Це творчі роботи за цілком визначеною темою протягом великого проміжку часу (8–12 місяців). До цієї форми роботи залучаються здібні, обдаровані, а то й талановиті учні. Керівниками учнівських наукових робіт можуть бути досвідчені вчителі, а також викладачі вузів. Досить часто такі роботи вимагають від учнів фундаментальних знань не тільки елементарної, але й вищої математики. По закінченню написання робіт учні стають учасниками Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідних робіт учнів (I, II, III туру), що проводиться щорічно в ініціативи Малої Академії Наук.

Автор статті є керівником таких тем учнівських наукових робіт.

1. Функціональні рівняння та способи їх розв'язування.

2. Способи задання функцій в елементарній та вищій математиці.

3. Нетрадиційні застосування похідної в шкільному курсі математики.

4. Застосування похідної в практичній діяльності людини.

5. Деякі класичні нерівності та способи їх доведення.

6. Невизначені рівняння та способи їх розв'язування.

7. Застосування векторної алгебри до розв'язування задач елементарної математики.

До роботи над такими темами залучалися здібні старшокласники, призери та переможці обласних та республіканських олімпіад з математики. Варто особливо відмітити учнів, які працювали над першою, третьою і п'ятою темами наукових робіт. Так, учениця, що працювала над першою темою, систематизувала відомі методи розв'язування функціональних рівнянь, розкрила їх сутність, розробила метод, який було названо методом ітерації, виділила та розв'язала функціональні рівняння, розв'язками яких є деякі елементарні функції, що вивчаються в шкільному курсі математики: логарифмічна, показникова, степенева. У третій роботі учениця розкрила можливості похідної при доведенні тотожностей, нерівностей, розв'язуванні деяких рівнянь, спрощенні виразів та розкладанні їх на множники, при знаходженні сум (сум рядів), дослідженні на періодичність функцій; а також продемонструвала застосування похідної для доведення відомих тригонометричних нерівностей, що справджуються в довільному трикутнику. Учнію, який працював над п'ятою темою, досить оригінально вдалося довести узагальнену та класичну нерівності Коші, нерівності Чебишева (про однаково та обернено впорядковані послідовності дійсних чисел), узагальнено нерівність Іенсена, нерівність Гельдера, Коші-Буняковського. Ці роботи були відмічені дипломами Малої Академії Наук.

Власні спостереження та досвід роботи говорять про те, що ефективним засобом розвитку мислення талановитих та обдарованих учнів є залучення їх до написання наукових робіт.

На закінчення варто підкреслити, що процес формування людини, пріоритетів її особистих якостей, життєвих установок безпосередньо впливає на економічний розвиток країни. Про це свідчить надзвичайно високий темп економічного розвитку за останнє десятиріччя таких країн як Японія, Південна Корея, Таїланд, Тайвань — країн невеликих за територією і з дуже обмеженими природними ресурсами. Серед різних обставин цього феномену експерти одноставно відзначають вміле, раціональне використання інтелектуальних ресурсів, зразкову, що спирається на нові досягнення психолого-педагогічної науки, постановку системи освіти і підвищену увагу до здібних і обдарованих дітей.

1. Лернер И.Я. Процесс обучения и его закономерности. — М., 1980. — 96 с.

2. Калмыкова З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости. — М., 1981. — 200 с.

3. Пономарёв Я.А. Психология творчества. — М., 1990. — 222 с.