Бондаренко Тетяна.
магістрантка, спеціальність «Математика».
Науковий керівник – ***Сверчевська І. А.****,*
кандидат педагогічних наук, доцент

ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ З ПАРАМЕТРОМ

У математиці існують задачі, які значною мірою сприяють розвитку математичних здібностей учнів. Але, на жаль, на які в звичайному курсі в силу різних причин виділяється мало часу.

Одним із видів таких задач є рівняння з параметром. Оволодіння методикою їх розв’язання є дуже важливим: воно істотно покращує рівень логічної підготовки учнів, дозволяє трішки по-іншому, як би з середини поглянути на “звичайні” функціональні залежності. Розв’язування таких задач вимагає не лише знань про властивості функцій і рівнянь, вміння виконати алгебраїчне перетворення, але й високої логічної культури і доброї техніки дослідження. Тому в розв’язуванні цих задач часто виникають труднощі. [2]

Отже, велику роль у розвитку математичного мислення учнів відіграє вивчення теми “Рівняння та їх системи з параметрами”.

Кожне таке рівняння – це короткий запис сімейства рівнянь. Зрозуміло, що виписати кожне рівняння із нескінченного сімейства неможливо, але кожне із них повинно бути розв’язане. Краще за все це зробити за допомогою графічного представлення залежності параметра a від змінної x. Відмітимо, що у відповіді ситуація представляється не в тому порядку, як проходив процес розв’язання. Ми показуємо не як параметр a залежить від змінної x, а як змінна x залежить від a [3].

Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 1. Скільки коренів має рівняння $\overline{x+a} = \log_{1/3}(x-2a)$ в залежності від значення параметра a?

Розв’язання: Зауважимо, що при введені функцій $y = \overline{x+a}$ і $y = \log_{1/3}(x-2a)$, ми отримуємо зразу два сімейства кривих. В цьому випадку пошук спільних точок ускладнюється. Але задачу можна полекшити, застосувавши заміну $x-2a=t$. Звідси отримуємо $\overline{t+3a} = \log_{1/3} t$. Розглянемо функцію $y = \overline{t+3a}$ і $y = \log_{1/3} t$. Серед їх лише одна задає сімейство кривих. Тепер ми бачимо, що проведена заміна приносить полегшення. Поглянемо на рис. 1.

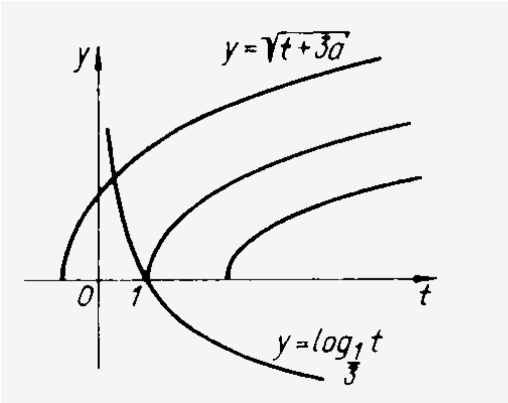

Рис. 1.

Очевидно, якщо абсциса вершини “півпараболи” більша за одиницю $-3a > 1$, $a < \frac{1}{3}$, то рівняння коренів не має. Якщо $a \geq -\frac{1}{3}$, то по малюнку видно, що графіки перетинаються, причому тільки в одній точці, оскільки функції $y = \sqrt{t + 3a}$ і $y = \log_{1/3} t$ мають різний характер монотонності.

Відповідь: Якщо $a \geq -\frac{1}{3}$, то рівняння має один корінь, якщо $a < -\frac{1}{3}$, то коренів немає.

Приклад 2. Знайти найменше *c*, при якому система

$$\begin{cases} (x - c\sqrt{3})^2 + y^2 - 2y = 0, \\ \sqrt{3}|x| - y = 4 \end{cases}$$ має один розв’язок.

Розв’язання: Перше рівняння системи зручно представити у вигляді $(x - c\sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 1$. Це рівняння задає сімейство кіл постійного радіуса, рівного 1, причому центри цих кіл лежать на прямій $y = 1$.

Побудуємо графік функції $y = \sqrt{3}|x| - 4$ (рис. 2).

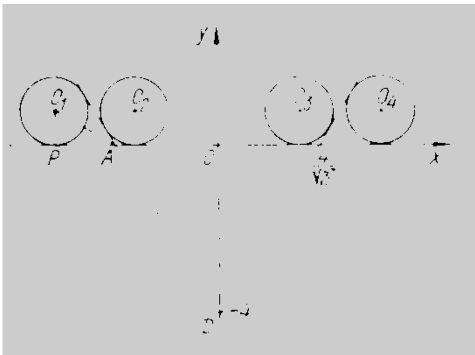

Рис. 2.

На цьому ж рисунку показано чотири положення кола, при яких вихідна система має один розв’язок. Кожному з відмічених кіл відповідає певне значення параметра *c*. Оскільки умова задачі вимагає, щоб *c* було найменшим, то із чотирьох кіл потрібно вибрати те, абсциса центра якого приймає найменше значення. Це буде коло з центром в точці O_1. *Рис. 2*

Маємо $c\ \overline{3} = AP + AO = AP + \frac{4}{3}$. Із ΔAOD: $\mathrm{tg}\angle OAD = \ \overline{3}$. Звідси $\angle O_1AP = \frac{1}{2}\angle DAO = 30°$. Тоді із $\Delta\ O_1PA$: $PA = O_1P\mathrm{ctg}30° = \ \overline{3}$. $c\ \overline{3} = \ \overline{3} + \frac{4}{3}$. Оскільки положення центра O_1 відповідає $c < 0$, то отримуємо

Відповідь: $c = -\frac{7}{3}$ [1].

Отже, використання задач з параметрами в навчальному процесі має різні навчальні цілі. А саме розвивати аналітичне та абстрактне мислення учнів, уміння застосовувати набуті знання в різних ситуаціях, знаходити оригінальні підходи до розв'язування рівнянь з параметрами та їх систем, а по-друге, повторити великий обсяг навчального матеріалу.

Література

1. Горнштейн П. И., Полонський В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. – К: РИА “Текст”; МП “ОКО”, 1992.
2. Евсеева А. И. Уравнения с параметрами // Математика в школе. – 2003. - № 7.
3. Мещерякова Г. П. Функционально-графіческий метод решения задач с параметрами // Математика в школе. – 1999. - № 6.