Дубовенко Марина,
студентка IV курсу, спеціальність «Математика та економіка».
Науковий керівник – ***Дідківська Т. В.,***
кандидат фізико-математичних наук, доцент

ЗАСТОСУВАННЯ СИМЕТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

... «Бути прекрасним означає бути симетричним і пропорційним»
Платон

Важко знайти людину, яка б не мала якогось уявлення про симетрію. "Симетрія" – слово грецького походження. Воно, як і слово "гармонія", означає відповідність, наявність певного порядку, закономірності в розташуванні частин.

У геометрії розглядаються різні види симетрії: осьова симетрія (симетрія відносно прямої), центральна симетрія (симетрія відносно точки) і дзеркальна симетрія (симетрія відносно площини)

Широко симетрія застосовується і в алгебрі. Одним з прикладів такого застосування є симетричні многочлени.

Многочленом $f(x_1,x_2,...,x_n)$ називається *симетричним* відносно змінних $(x_1,x_2,...,x_n)$, якщо в результаті довільної перестановки змінних $(x_1,x_2,...,x_n)$, отримаємо многочлен, що дорівнює даному

Многочлен x^2y+xy^2 – симетричний. Навпаки, многочлен x^3-3y^3 не є симетричним: при заміні *х* на *у*, а *у* на *х* він перетворюється на многочлен y^3-3x^3, який не збігається з первинним.

З важливими прикладами симетричних многочленів ми вже зустрічалися, вивчаючи теорему Вієта [4, с. 298]. Якщо позначити x_1 , x_2 ,... x_n як корені многочлена $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, то формули Вієта запишуться наступним чином*:*

$$x_1+x_2+....+x_n=-a_{n-1}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=a_{n-2}$$

$$.....$$

$$x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n a_0$$

Позначивши ліві частини цих формул через $\sigma_{1,}\sigma_{2,...}\sigma_n$, отримаємо основні симетричні многочлени:

$$\sigma_1=x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$$

$$.....$$

$$\sigma_n=x_1x_2..x_n$$

Ціла серія задач, в яких потрібно знайти деякі вирази, що містять корені заданого квадратного рівняння, можна з успіхом вирішити за допомогою симетричних многочленів.

Приклад 1. *Нехай задано квадратне рівняння* $x^2+6x+10=0$. *Скласти нове рівняння, коренями якого є квадрати коренів даного рівнян*ня.

Для розв'язання завдання позначимо корені заданого рівняння через x_1 *і* x_2, корені шуканого рівняння – через y_1 і y_2, а коефіцієнти шуканого рівняння – через *p* і *q*. За теоремою Вієта для даного рівняння:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 = -6$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 = 10$$

Так само для шуканого рівняння:

$$y_1 + y_2 = -p$$

$$y_1 y_2 = q$$

За умовою задачі, маємо: $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$, тому можемо записати для коефіцієнтів:

$$p = -(y_1 + y_2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -S_2,$$

$$q = y_1 y_2 = x_1^2 x_2^2 = \sigma_2^2 = 100$$

де S_2 – друга степенева сума, яку виражаємо через основні симетричні многочлени за таблицею степеневих сум [1, с. 47].

$$p = -(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = -16$$

$$q = \sigma_2^2 = 100$$

Таким чином, шукане квадратне рівняння має вигляд $y^2 - 16y + 100 = 0$.

Приклад 2. *Скласти квадратне рівняння, коренями якого є куби коренів даного рівняння* $x^2+6x+10=0$.

Як і в попередньому випадку позначимо корені даного рівняння через x_1 *і* x_2, корені шуканого рівняння – через y_1 і y_2, а коефіцієнти шуканого рівняння – через *p* і *q*. За теоремою Вієта для даного рівняння:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 = -6$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 = 10$$

Так само для шуканого рівняння:

$$y_1 + y_2 = -p$$

$$y_1 y_2 = q$$

За умовою задачі маємо: $y_1 = x_1^3, y_2 = x_2^3$, тому можемо записати для коефіцієнтів:

$$p=-(y_1+y_2)=-(x_1^3+x_2^3)=-S_3$$
$$q=y_1y_2=x_1^3x_2^3=\sigma_2^3=1000,$$

де S_3 – третя степенева сума, яку виражаємо через основні симетричні многочлени за таблицею степеневих сум [1, с.47].

$$p=-(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)=36$$
$$q=\sigma_2^2=1000$$

Отже, шукане квадратне рівняння має вигляд $y^2+36y+1000=0.$

Приклад 3. *Скласти квадратне рівняння* $z^2+pz+q=0$, *коренями якого є числа* $z_1=x_1^6-2x_2^2, z_2=x_2^6-2x_1^2$, *де* x_1, x_2 - *корені квадратного рівняння* $x^2-x-3=0$

Для вирішення цього завдання знову скористаємось формулами Вієта, згідно до яких $\sigma_1=x_1+x_2=1, \sigma_2=x_1x_2=-3.$

З іншого боку для шуканого рівняння, за цими ж формулами:

$$-p=z_1+z_2=(x_1^6-2x_2^2)+(x_2^6-2x_1^2),$$
$$q=z_1z_2=(x_1^6-2x_2^2)(x_2^6-2x_1^2)$$
$$-p=(x_1^6+x_2^6)-2(x_1^2+x_2^2)=S_6-2S_2$$
$$q=(x_1^6-2x_2^2)(x_2^6-2x_1^2)=x_1^6x_2^6-2(x_1^8+x_2^8)+4x_1^2x_2^2=\sigma_2^2-2S_8+4\sigma_2^2,$$

де S_8 – восьма степенева сума, яку виражаємо через основні симетричні многочлени за таблицею степеневих сум [1, с.47].

$$-p=(\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3)-2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=1^6-6\cdot1^4\cdot(-3)+9\cdot1^2\cdot(-3)^2-$$
$$-2(-3)^3-2(1^2-2(-3))=140$$

$$q=\sigma_2^6-2(\sigma_1^8-8\sigma_1^6\sigma_2+20\sigma_1^4\sigma_2^2-16\sigma_1^2\sigma_2^3+2\sigma_2^4)+4\sigma_2^2=(-3)^6-2(1^8-8\cdot1^6\cdot(-3))+$$
$$+20\cdot1^4\cdot(-3)+20\cdot1^4\cdot(-3)^2-16\cdot1^2\cdot(-3)^3+2\cdot(-3)^4+4\cdot(-3)^2=-833$$

Таким чином, *p=-140, q=-833*, тому шукане квадратне рівняння матиме вигляд: $z^2-140z-833=0$

Приклад 4. *Скласти квадратне рівняння з коренями* x_1 *та* x_2, *якщо* $x_1^3+x_2^3=7, x_1+x_2=1.$

Нехай шукане рівняння має вигляд $x^2+ax+b=0$. За теоремою Вієта , його корені задовольняють умову: $\sigma_1=x_1+x_2=-a$, $\sigma_2=x_1x_2=b$

Оскільки $x_1^3+x_2^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$, то $\begin{cases}\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=7\\ \sigma_1=1\end{cases}$ і $\begin{cases}\sigma_1=1\\ \sigma_2=-2\end{cases}$

Отже, $a=-1, b=-2$ і шукане рівняння має вигляд $x^2-x-2=0.$

Література

1. Болтянский В. Г. Симметрия в алгебре / Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. – М. : МЦНМО, 2002. –240 с.
2. Винберг Э. Б. Алгебра многочленов / Винберг Э. Б. – М. : Просвещение, 1980. – 175 с.

3. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел : практикум / Завало С.Т. – Частина 2. – К. : Вища шк., 1986. – 264 с.
4. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел / Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.І. –Частина 2. – К. : Вища шк., 1980. – 406 с.