Свинаренко Наталія

Науковий керівник – Сверчевська І. А.,

кандидат педагогічних наук, доцент

УЗАГАЛЬНЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ТВЕРДЖЕНЬ

Основна частина нашого свідомого мислення зв’язана з розв’язуванням задач. Наші думки направленні на якусь кінцеву ціль, ми шукаємо шлях і засоби для досягнення цієї цілі, ми намагаємося винайти якийсь курс, слідуючи якому, можна досягнути нашої кінцевої цілі.

Особливою властивістю людського розуму є вміння узагальнювати. Узагальнення — основний елемент логіки та міркувань людини. Під узагальненням розуміють мисленне виділення якихось властивостей, що належать певному класу предметів, перехід від одиничного до загального. Узагальнення бере за основу існування множини елементів та однієї або декількох властивостей, спільних для цих елементів.[1]

Узагальненнями послуговуються в різних видах навчально-пізнавальної діяльності, зокрема під час вивчення математики: формулюючи поняття, доводячи теорему і, особливо, при розв’язуванні задач.

Розглянемо узагальнення в математиці на прикладі дослідження екстремумів многочлена третього степеня.

Будемо розглядати функцію:

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *(1)*

Для того, щоб перейти до узагальнення в дослідженнях екстремумів многочлена третього степеня, необхідно ознайомитися з лемою.[2]

Лема: *Нехай дано многочлен третього степеня* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$ *, і нехай* $x = \alpha$ *- його дійсний корінь. Тоді*

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha)(x^2 + px + q)$, *(2)*

де p *і* q *деякі дійсні числа.*

Знайдемо необхідну й достатню умову для того, щоб точка $x = \alpha$ - корінь многочлена *(1)* – являлася точкою екстремуму функції $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Для цього скористаємося висновком з леми – формулою *(2)*. Якщо $x = \alpha$ не є коренем квадратного тричлена $x^2 + px + q$, то в достатньо малому околі точки $x = \alpha$ даний тричлен зберігає постійний знак і тому функція $y = a(x-\alpha)(x^2 + px + q)$ змінює знак при переході через точку $x = \alpha$. Те саме буде у випадку, коли $x = \alpha$- двократний корінь тричлена. Тобто $x^2 + px + q = (x-\alpha)^2$ і, відповідно, $y = a(x-\alpha)^3$. В розглянутих випадках екстремума немає. І лише в одному випадку функція не змінює знаку при переході через точку $x=\alpha$, коли $x=\alpha$ - однократний корінь квадратного тричлена, тобто $x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)$, чи , що те саме $x=\alpha$ - двократний корінь многочлена *(1)*, тобто

$$y=(x-\alpha)^2(x-\beta), \text{ де } \alpha\neq\beta.$$

Отже, корінь многочлена третього степеня є його точкою екстремума тоді і тільки тоді, коли цей корінь двократний.

Узагальнимо отримане твердження.

Теорема. *Для того, щоб точка* $x=\alpha$ *була точкою екстремума функції* $y=ax^3+bx^2+cx+d$, *необхідно і досить, щоб існувало таке число* m, *при якому многочлен* $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d-m$ *має двократний корінь* $x=\alpha$, *тобто* $P(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$, *де* $\alpha\neq\beta$.

Розглянемо приклад на застосування отриманого узагальнення.

Приклад 1.

Дослідити на екстремум функцію $y=x^3-3x^2-9x+5$.

Розв’язання:

Необхідно підібрати числа m, α, β так, щоб виконувалася тотожність

$x^3-3x^2-9x+5-m=(x-\alpha)^2(x-\beta)$.

Виконавши множення і згрупувавши відповідні доданки, отримаємо

$x^3-3x^2-9x+5-m=x^3-(\beta+2\alpha)x^2+(2\alpha\beta+\alpha^2)x-\alpha^2\beta$.

Прирівняємо відповідні коефіцієнти, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}-(\beta+2\alpha)=-3,\\ 2\alpha\beta+\alpha^2=-9,\\ -\alpha^2\beta=5-m.\end{cases}$$

Дана система має наступні розв’язки:

$\alpha_1=-1, \beta_1=5, m_1=10;$

$\alpha_2=3, \beta_2=-3, m_2=-22.$

Таким чином, задана функція має екстремуми в точках $x_1=-1, x_2=3.$ А точки $x_1=-1, y_1=10$ і $x_2=3, y_2=-22$ мають важливе значення для побудови графіка функції $y=x^3-3x^2-9x+5$.

Але не кожний многочлен третього степеня має точки екстремуму. Розглянемо приклад.

Приклад 2.

Дослідити функцію $y=-x^3+3x^2-4x+5$ *на екстремум.*

Розв’язання:

Використаємо отримане узагальнення.

$-x^3+3x^2-4x+5-m=-(x-\alpha)^2(x-\beta)$

Звідси отримаємо

$$-x^3+3x^2-4x+5-m=-(x^3-(\beta+2\alpha)x^2+(2\alpha\beta+\alpha^2)x-\alpha^2\beta).$$

Знайдемо числа m, α, β прирівнявши відповідні коефіцієнти і склавши систему рівнянь.

$$\begin{cases}\beta+2\alpha=3\\ -(2\alpha\beta+\alpha^2)=-4\\ \alpha^2\beta=5-m\end{cases}$$

Дана система рівнянь не має дійсних розв'язків, отже, не має точки екстремуму.

Як ми бачимо, узагальнення в математиці дозволяють не лише спростити розв'язування задач, зекономити час на розв'язування однотипних задач, але й допомагають охопити ширший клас задач, сприяти виведенню нових теорем.

Література:

1. Мойсеюк Н.Є, Педагогіка: навч. посіб., 2001. – 608 с.
2. Мордкович А.Г. Екстремуми многочлена третього степеня // Квант.-1974 - № 11. – С. 8-11.