Каленська Оксана
Науковий керівник – Сверчевська І. А.,
кандидат педагогічних наук, доцент

МЕТОД МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Людина живе серед подій, які відбувалися одна за одною або паралельно. Потреби, цілі людини зумовлюють необхідність розібратись у тому, що з чого виходить, як пов'язані між собою події, об'єкти, явища, які їхні властивості детермінують зв'язок.

На перший погляд здається, що в цьому допоможе досвід, збережений у пам'яті людини. Наприклад, вона запам'ятала за прожитий період певну кількість випадкових зв'язків – і цього досить для підтримання життєдіяльності, для реалізації своїх потреб та завдань. Але буття складніше, і лише звички та минулий досвід не розв'язують усіх проблем. Це й змушує шукати таку властивість, такий зв'язок, які б допомогли дати відповідь на питання, досягти мети, розв'язати проблему. Скажімо, якщо будувати урок, покладаючись лише на новітню технологію як універсальну та чудодійну, ми не завжди зможемо досягти мети уроку.

Отже, потрібне уважне вивчення, обстеження, аналіз ситуації з метою виявлення таких взаємозв'язків фактів, подій, об'єктів та їхніх властивостей, які необхідні для розв'язання проблем. Пошук істотної для нас ознаки – непростий, досить своєрідний акт, який виконує мислення.[1, с. 139].

Мислення являє собою процес опосередкованого й узагальненого відображення людиною предметів і явищ об'єктивної дійсності в їхніх істотних властивостях, зв'язках та відношеннях. Мислення є одним із провідних пізнавальних процесів, його вважають найвищим ступенем пізнання.

Мислення надає людині можливість відобразити й зрозуміти не тільки те, що може бути безпосередньо сприйняте відчуттями, а й те, що сховане від безпосереднього чуттєвого сприйняття. Мислення являє собою ядро інтелектуально-творчого потенціалу особистості, його активну складову. Саме через мислення відбувається процес цементування окремих пізнавальних процесів у єдиний блок – *інтелект* людини, бо воно забезпечує здатність людини будувати індивідуальну «картину світу», по-своєму, особистісно відображати й розуміти навколишню дійсність, суб'єктивно розвивати й реорганізувати індивідуальний суб'єктивний досвід, головним чином досвід пізнавальної взаємодії з навколишньою дійсністю.

Отже, *мислення* – це процес (пізнавальна діяльність), продукт якої характеризується узагальненим і опосередкованим відображенням дійсності, воно диференціюється на види залежно від рівнів узагальнення і характеру засобів, які використовуються, залежно від новизни узагальнень і засобів для суб'єкта, а також залежно від ступеня активності самого суб'єкта мислення. Мислення – процесуальне, тобто розгорнуте в часі, динамічне. Хід мислення рідко з самого початку є запрограмованим, сама детермінація мислення також створюється і розвивається під час мислення, тобто є процесом.[2, с. 270–271]

Математика використовується для розв'язку багатьох актуальних завдань, причому розширення і поглиблення її впливу на багато галузей теоретичних досліджень і практичної діяльності можна прогнозувати з великою точністю

Із поняттям «модель» ви уже зустрічалися, розглядаючи моделі літака, двигуна внутрішнього згорання, піраміди, кулі тощо. Основна властивість кожної моделі полягає в тому, що вона відображає найбільш суттєві властивості оригіналу. Математична модель – це опис якогось реального об'єкта або процесу мовою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо.

Використання математики для розв'язування задач із будь-якої галузі, що явно не сформульовані у математичних термінах, включає у себе такі три кроки:

1) формулюємо задачу мовою математики, тобто будуємо математичну модель;

2) розв'язуємо одержану математичну задачу;

3) записуємо математичний розв'язок мовою, якою була сформульована початкова задача.

Математична модель об'єкта чи явища будується на основі деяких спрощень, а тому завжди є їх наближеним описом. Але завдяки заміні реального об'єкта його математичною моделлю виникає можливість сформулювати математичну задачу для його вивчення. Математичні моделі – це, як правило, різноманітні рівняння, що є записами законів природи, які керують досліджуваним об'єктом чи явищем.

Історія науки знає чимало прикладів, коли в межах вдало побудованої математичної моделі за допомогою обчислень, як кажуть, «на кінчику пера», вдавалося передбачити існування нових фізичних явищ та об'єктів. Так, спираючись на математичні моделі, астроном Дж. Адамс (Англія) в 1845 році і У. Левер'є (Франція) в 1846 році незалежно один від одного дійшли висновку про існування невідомої тоді ще планети і вказали її розміщення. За розрахунками Левер'є астроном Г. Галле (Німеччина) знайшов цю планету. її назвали Нептуном.

Англійський фізик М. Дірак у 1928 році отримав рівняння руху електрона. З розв'язку цього рівняння випливало існування елементарної частинки, яка відрізняється від електрона лише знаком електричного заряду. Таку частинку у 1932 році відкрив фізик К. Д. Андерсен (США) і назвав її позитроном.

Метод математичного моделювання відіграє неабияку роль у корабле- та авіабудуванні, економіці тощо.

Розглянемо декілька прикладів, для розв’язування яких можна використати метод математичного моделювання.

Приклад 1. $2^x - x - 1 = 0$

Побудуємо графіки функцій $y = 2^x$ і $y = x + 1$ (рис. 1). Із графіку видно, що рівняння має корені $x_1 = 0$ *і* $x_2 = 1$.

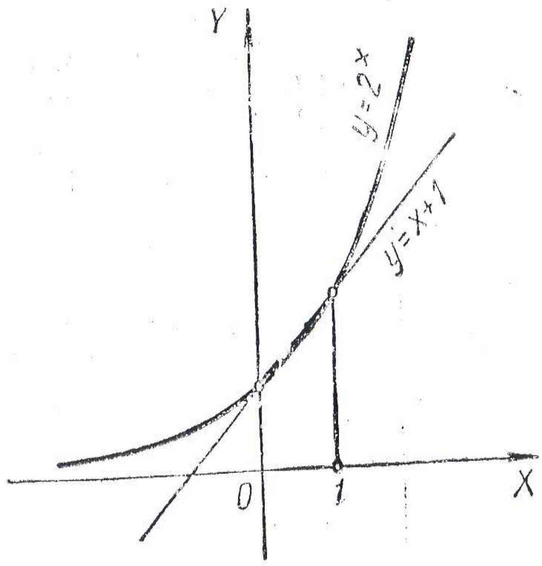


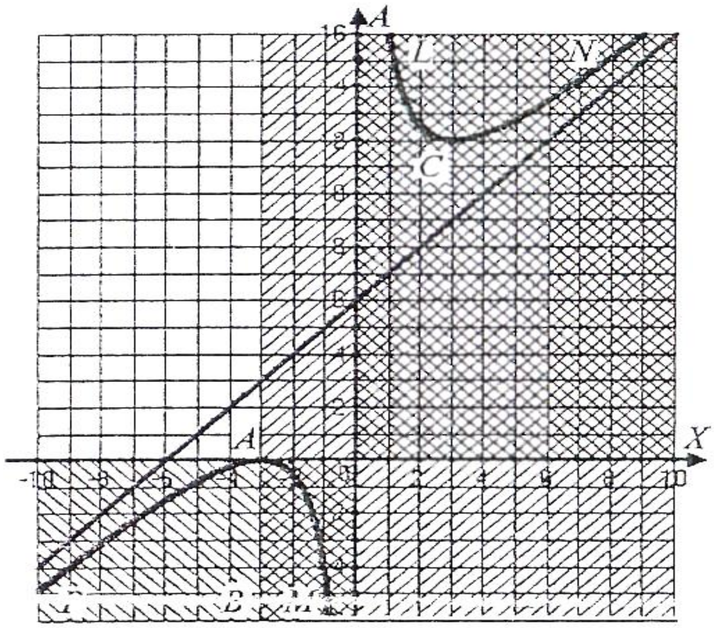
Рис. 1.

Приклад 2. 2 lg (x+3) = lg (ax)

Побудуємо модель задачі. Для розв’язання даного рівняння використаємо графічний спосіб, зобразивши для цього в координатній площині x0a всі умови, які входять до системи, рівносильної даному рівнянню (рис. 2). Ця рівносильна система умов буде моделлю вихідної задачі:

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ ax > 0 \\ (x+3)^2 = ax \end{cases}$$

Перші дві умови вказують, що рівняння матиме розв'язки в частині координатної площини (долі у тексті – область D_1), що є перерізом сукупності першого та третього координатних кутів з півплощиною x > -3. На мал. 6 це внутрішня частина прямого кута між додатними півосями 0x і 0a та частина площини, обмежена від'ємною частиною осі 0a, відрізком OA та пів прямою AB. Зазначимо, що самі вказані межі не входять до області D_1.



Мал. 2. Розв'язки рівняння (4)

Для одержання розв'язків рівняння проведемо дослідження та побудуємо графік функції, формулу якої можна отримати з третьої системи:

$$a(x) = \frac{(x+3)^2}{x}.$$

Зауважимо, що тут можна було б обмежитися і побудовою графіка рівняння, заданого в третій умові системи. Результати будуть ідентичні. Врахуємо той факт, що термін «графік рівняння» не є розповсюдженим у шкільному курсі математики і використовується лише під час вивчення лінійних рівнянь з двома змінними та при проведенні узагальнення і систематизації знань та умінь випускників. Однак ми вважаємо доцільним використовувати це поняття і до нелінійних рівнянь.

1. Область визначення функції *a(x)* є множина всіх дійсних чисел за виключенням числа 0. Визначивши з формули функції *x*, маємо, що множина значень функції буде такою:

$$E(a(x)) = R \setminus (0; 12).$$

2. З'ясуємо точки перетину графіка функцій *a(x)* з осями координат. Оскільки $x \neq 0$, то вісь $0a$ графік не перетинає. Легко пересвідчитися, що пряма $x = 0$ є асимптотою графіка функцій *a(x)*, причому:

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{a(x)} = \infty; \ \lim_{x\to 0^-} \mathrm{a(x)} = -\infty.$$

З віссю *0x* графік має єдину спільну точку А(-3; 0) (мал. 6).

3. Дослідимо функцію *a(x)* на зростання (спадання):

$$a'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}.$$

Отже, точки $x = -3$ та $x = 3$ – стаціонарні точки. Перевіривши їх на екстремум, бачимо, що точка А(-3; 0) є точкою максимуму функції, а точка С(3; 12) є точкою мінімуму функції *a(x)*.

4. Перевіримо графік функції *a(x)* на наявність похилих асимптот. Як відомо, похила асимптота функції $a = a(x)$ задається формулою: $a = кx + в$, де $к = \lim_{x\to\infty} \frac{a(x)}{x}$, $в = \lim_{x\to\infty} |a(x) - кx|$.

Провівши елементарні перетворення та обчислення, маємо: $к = 1$, $в = 6$. Тому лінія, задана формулою $a = x + 6$, є похилою асимптотою функції *a(x)*.

За результатами дослідження побудуємо графік функції $a(x) = \frac{(x+3)^2}{x}$ (мал. 6). Координати точок побудованого графіка і є з урахуванням перших двох рівнянь системи розв'язками даного рівняння.

Зробимо декілька зауважень:

а) крива РА разом з точкою А не э розв'язком рівняння, оскільки не задовольняє першу умову системи;

б) області D_1 належатимуть такі ділянки графіка функції *a(x)*: крива АМ (без точки А), та крива LCN.

Отже, для формулювання і трансляції розв'язків рівняння скористаємося алгоритмом, описаним в [17]. Транслюємо отриману графічну відповідь в аналітичний запис:

При $a \in (-\infty; 0) \cup \{12\}$ $\quad x = \frac{a - 6 + \sqrt{a^2 - 12a}}{2}$;

При $a \in [0; 12)$ $\quad x \in \varnothing$;

При $a \in (12; +\infty)$ $\quad x = \frac{a - 6 + \sqrt{a^2 - 12a}}{2}$ *або*

$$x = \frac{a - 6 - \sqrt{a^2 - 12a}}{2}.$$

Відповідь: При $a \in (-\infty; 0) \cup \{12\}$ $x = \frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2}$ *;*

При $a \in [0; 12)$ $x \in \varnothing$;

При $a \in (12; +\infty)$ $x = \frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2}$ *або*

$x = \frac{a-6-\sqrt{a^2-12a}}{2}$.

Ми навели декілька прикладів пов'язаних з розв'язуванням рівнянь методом моделювання. Однак, представлений метод можна застосовувати і для розв'язування інших задач, зокрема його використовують для вирішення різних видів текстових задач. Використання такого методу в процесі розв'язування задач розвиває в учнів уяву, мислення, сприяє формуванню навчальних навичок в вмінь.

Література

1. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 7 – 9 кл. – [5-те вид.]. – К. : Освіта, 2003.
2. Кушнір Н. А., Кушнір Т. А., Річняк О. Я. Формування умінь розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром з використанням інтеграції знань з математики // Математика в школі. – 2006. – № 6.
3. Скрипченко О. В., Долинська Л. В. та ін. Загальна психологія. – К. : Либідь, 2005.
4. Трофімов Ю. Л., Алексєєва М. І. та ін. Психологія. – К. : Либідь, 2001.