ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Василь ШВЕЦЬ — завідувач кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ ім. М. П. Драгоманова, кандидат педагогічних наук;
Алла ПРУС — доцент кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики ЖДУ ім. І. Франка, кандидат педагогічних наук, доцент

1. Поняття лінійного рівняння з параметром

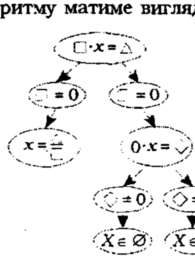
Зі шкільного курсу алгебри відомо, що рівняння виду $ax = b$ (або $ax + b = 0$), де a і b — дійсні числа, x — змінна, називається **лінійним**. Дотримуючись аналогічних міркувань, можна сформулювати таке означення.

Означення. Лінійним рівнянням із параметром (параметрами) називають рівняння виду $f(a) \cdot x = \varphi(a)$ (або $f(a) \cdot x + \varphi(a) = 0$), де $f(a)$ і $\varphi(a)$ — аналітично задані функції параметра (змінної) a, x — змінна.

Наприклад, рівняння: $ax + 5 = 0$; $3x + b = 0$; $5x + (a - 2) = 0$; $(a^2 - 6a + 5)x - a + 1 = 0$ — лінійні рівняння з параметром a. За винятком другого, в якому параметром є змінна b.

Рівняння може містити і не один параметр. Так, рівняння $(10a - b)x = 13 + 2b$ — теж лінійне. В ньому $f(a; b) = 10a - b$, а $\varphi(a; b) = 2b + 13$. Обидві функції мають два параметри (дві змінні) a і b.

Розв'язання лінійних рівнянь із параметром дуже схоже на розв'язання лінійних рівнянь у курсі алгебри основної школи. Тому під час їх розв'язування зручно користуватися схожим алгоритмом. Якщо позначити функцію $f(a)$ символом □, а функцію $\varphi(a)$ — символом Δ, то схема такого алгоритму матиме вигляд (див. мал.).



Алгоритм розв'язування лінійного рівняння з параметром

Символом ◊ на малюнку 1 позначено значення функції $\varphi(a)$ *при тих значеннях параметра* a, при яких $f(a) = 0$. Іншими словами, $◊ = \varphi(a_0)$, де a_0 — корінь рівняння $f(a) = 0$.

Проілюструємо розв'язання лінійного рівняння з параметром, з дотриманням указаного алгоритму, на конкретному прикладі (див. таблицю на с. 20).

2. Приклади розв'язування лінійних рівнянь із параметром

1. Розв'яжіть рівняння з параметром a:
$2 \cdot x = a$.

Розв'язання. Рівняння $2 \cdot x = a$ — лінійне, коефіцієнт біля змінної не дорівнює нулю, тому розв'язком буде $x = \frac{a}{2}$.

Відповідь. Якщо $a \in \mathbf{R}$, то $x = \frac{a}{2}$.

2. Розв'яжіть рівняння з параметром a:
$a \cdot x = 1$.

Розв'язання. Наведене рівняння лінійне. Коефіцієнт біля змінної може бути довільним числом, серед яких і нуль. Щоб знайти невідомий множник x, потрібно добуток розділити на другий множник. Якщо $a \neq 0$, то розв'язок рівняння $x = \frac{1}{a}$. Якщо $a = 0$, то ділити не можна, тому підставимо $a = 0$ у початкове рівняння, отримаємо: $0 \cdot x = 1$; $0 \neq 1$, отже $x \in \varnothing$.

Відповідь. Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; якщо $a = 0$, то $x \in \varnothing$.

3. Розв'яжіть рівняння з параметром a:
$a \cdot x = 0$.

Розв'язання. Оскільки коефіцієнт при змінній може дорівнювати нулю, то потрібно розглянути два випадки: 1) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{0}{a}$, $x = 0$; 2) якщо $a = 0$, то $0 \cdot x = 0$, отже, $x \in \mathbf{R}$.

Відповідь. Якщо $a \neq 0$, то $x = 0$; якщо $a = 0$, то $x \in \mathbf{R}$.

4. Розв'яжіть рівняння з параметром a:
$(a^2 - 6a + 5) \cdot x = a - 1$.

Розв'язання. Це рівняння відносно змінної x є лінійним. Отже, хоча і коефіцієнт біля шуканої змінної є складнішим за виглядом, аналогічно, складнішим є і вираз, що визначає добуток, але хід розв'язування не змінюється. Тобто знову розглядаємо два випадки: коефіцієнт біля змінної не нуль і коли він є нулем.

1) Отже, якщо $a^2 - 6a + 5 \neq 0$, тобто, $a \neq 1$, $a \neq 5$, то $x = \frac{a-1}{a^2-6a+5} = \frac{(a-1)}{(a-1)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$;

2) якщо $a^2 - 6a + 5 = 0$, тобто: якщо $a = 1$, то $0 \cdot x = 0$, $0 = 0$, $x \in \mathbf{R}$; якщо $a = 5$, то $0 \cdot x = 4$, $0 \neq 4$; $x \in \varnothing$.

Відповідь. Якщо $a = 1$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $a = 5$, то $x \in \varnothing$; якщо $a \in (-\infty; 1) \cup (1; 5) \cup (5; +\infty)$, то $x = \frac{1}{a-5}$.

Розв'язання рівняння з параметром a

Розв'яжіть рівняння $2a^2x - 3ax - a^2 - a - x = a^2x - 2ax - 6 + x$ з параметром a			
1)	$2a^2x - 3ax - a^2 - a - x = a^2x - 2ax - 6 + x$, $2a^2x - 3ax - x - a^2x + 2ax - x = -6 + a^2 + a$		Перенесемо одночлени зі змінною x у ліву частину, а без змінної x — у праву
2)	$a^2x - ax - 2x = a^2 + a - 6$		Зведемо подібні доданки
3)	$(a^2 - a - 2)x = a^2 + a - 6$ (*) $(\square \cdot x = \Delta)$		Винесемо змінну x за дужки; отримали лінійне рівняння з параметром a
4)	Якщо $a^2 - a - 2 \neq 0$, $(\square \neq 0)$	то $x = \frac{a^2+a-6}{a^2+a-2}$ $x = \frac{\Delta}{\square}$	Розглянемо випадок, коли коефіцієнт при змінній не дорівнює 0. Знаходимо корінь рівняння (ділимо)
	Тобто $a \neq -1$; $a \neq 2$	То $x = \frac{(a+3)(a-2)}{(a-2)(a+1)}$, $x = \frac{a+3}{a+1}$	Обчислюємо значення параметра, при яких коефіцієнт не дорівнює 0. Проводимо спрощення у виразі, що є розв'язком рівняння
5)	Якщо $a^2 - a - 2 = 0$ $a = -1$ або $a = 2$ $(\square = 0)$	—	Розглянемо, коли коефіцієнт при змінній x буде дорівнювати 0, і обчислюємо відповідні значення параметра (ділити на 0 не можна!)
	При $a = -1$	$0 \cdot x = -6$, $(\Delta = -6)$ $0 \neq -6$, $x \in \varnothing$	Знайдемо розв'язки рівняння для кожного із знайдених значень параметра, підставляючи їх у рівняння (*)
	При $a = 2$	$0 \cdot x = 0$, $(\Delta = 0)$ $0 = 0$, $x \in R$	
Відповідь. Якщо $a = -1$, то $x \in \varnothing$; якщо $a = 2$, то $x \in R$; якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = \frac{a+3}{a+1}$			

5. При якому значенні параметра a рівняння $3ax = 42$ має корінь, що дорівнює числу 7?

Розв'язання. Якщо корінь рівняння дорівнює 7, тобто $x = 7$, то $3a \cdot 7 = 42$, $21a = 42$, звідки $a = 2$.

Відповідь. $a = 2$.

6. При якому значенні параметра a рівняння $(5 + a) \cdot x = 7 - 4a$ має корінь, що дорівнює числу 3?

Розв'язання. Оскільки корінь рівняння дорівнює 3, то $(5 + a) \cdot 3 = 7 - 4a$, $15 + 3a = 7 - 4a$, $7a = -8$, $a = -\frac{8}{7}$.

Відповідь. $a = -\frac{8}{7}$.

7. При якому значенні b рівняння $7x + 2 = b - 3$ і $4 - 5x = 2b + 1$ мають спільний корінь?

Розв'язання. Знайдемо корінь кожного із цих лінійних рівнянь:

1) $7x + 2 = b - 3$, $x = \frac{b-5}{7}$;

2) $4 - 5x = 2b + 1$, $x = \frac{2b-3}{-5}$. Оскільки корінь, на вимогу задачі, має бути спільним, то $\frac{b-5}{7} = \frac{2b-3}{-5}$, звідки знаходимо $b = \frac{46}{19}$.

Відповідь. $b = \frac{46}{19}$.

8. Наведіть значення a, при якому рівняння $ax = 4$: а) не має коренів; б) має від'ємний корінь; в) має корінь більший за 1, але менший 2.

Розв'язання. а) Якщо $a = 0$, то $0 \cdot x = 4$, $0 \neq 4$, то рівняння не має коренів. б) Якщо $a \neq 0$, то знайдемо розв'язок рівняння: $x = \frac{4}{a}$; розв'язок $x = \frac{4}{a} < 0$ при $a < 0$. в) Якщо $a \neq 0$, то знайдемо розв'язок рівняння: $x = \frac{4}{a}$; на вимогу задачі:

$$1 < \frac{4}{a} < 2, \quad \begin{cases} \frac{4}{a} > 1, \\ \frac{4}{a} < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4-a}{a} > 0, \\ \frac{4-2a}{a} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (0; 4), \\ a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty); \end{cases} \quad a \in (2; 4).$$

Відповідь. а) $a = 0$; б) $a \in (-\infty; 0)$; в) $a \in (2; 4)$.

9. Знайдіть усі цілі значення параметра a, при яких корінь рівняння $ax = 4$ також є цілим числом.

Розв'язання. Якщо $a \neq 0$, то можна знайти розв'язок рівняння: $x = \frac{4}{a}$. Корінь рівняння є цілим числом, якщо дріб $\frac{4}{a}$ — ціле число. Отже, ± 1; ± 2; ± 4.

Відповідь. $a \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$.

Насамкінець зазначимо, що у більш складних вправах на параметр лінійного рівняння можуть бути накладені певні обмеження. Так, наприклад, якщо параметр лінійного рівняння міститься або у знаменнику дробу, або під знаком кореня, або під знаком логарифма тощо, то він не може набувати всіх дійсних значень, а набуває лише допустимих значень. Отже, при недопустимих значеннях параметра, невизначеним буде і саме рівняння. У такому разі у відповіді при таких значеннях параметра можна писати так: «рівняння невизначене» або «задача не має змісту».

3. Вправи для самостійного розв'язування
Група А

10. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:
1) $ax = -3$;
2) $(a^2 - 1) \cdot x = a^2 + a$;
3) $(a^3 - a^2 - 4a + 4)x - a + 1 = 0$;
4) $(a^2 - 2a + 1)x = a^2 + 2a - 3$.

Відповідь. 1) Якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, то $x = -\frac{3}{a}$; якщо $a = 0$, то $x \in \varnothing$; 2) якщо $a = -1$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $a = 1$, то $x \in \varnothing$; якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = \frac{a}{a-1}$; 3) якщо $a = 1$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $a = \pm 2$, то $x \in \varnothing$; якщо $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = \frac{1}{a^2-4}$; 4) якщо $a = 1$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $a \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = \frac{a+3}{a-1}$.

11. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:
1) $ax - 2x = a^2 - 4$;
2) $(a - 1)x + 2 = a + 1$;
3) $a^2x + 1 = x + a$;
4) $\frac{a+x}{3} - 2 = \frac{x-3}{a}$.

Відповідь. 1) Якщо $a = 2$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $a \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = a + 2$; 2) якщо $a = 1$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $a \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = 1$; 3) якщо $a = 1$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $a = -1$, то $x \in \varnothing$; якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = \frac{1}{a+1}$; 4) якщо $a = 0$, то задача не визначена; якщо $a = 3$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$, то $x = 3 - a$.

12. Розв'яжіть рівняння з параметром m:
1) $m^2x = m(5x + 2) - 10$;
2) $m^2x = m(x + 2) - 2$;
3) $3x - 5m = m^2 - 2x$.

Відповідь. 1) Якщо $m = 5$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $m = 0$, то $x \in \varnothing$; якщо $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 5) \cup (5; +\infty)$, то $x = \frac{2}{m}$; 2) якщо $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = \frac{2}{m}$; якщо $m = 1$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $m = 0$, то $x \in \varnothing$; 3) при довільному значенні параметра m $x = \frac{m^2+5m}{m}$.

13. Визначте, при яких значеннях параметра t рівняння $3(2 - x) = 4(t - 2x)$ має додатні розв'язки. ***Відповідь.*** $t \in (1{,}5; +\infty)$.

14. Визначте, при яких значеннях параметра k рівняння $\frac{4x+3k}{3} = \frac{5x-2k}{4}$ має від'ємні розв'язки. ***Відповідь.*** $k \in (0; +\infty)$.

15. Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\frac{ax+11}{3} = \frac{4x-5a}{7}$ має від'ємний розв'язок?

Відповідь. $a \in \left(-\infty; -5\frac{2}{15}\right) \cup \left(1\frac{5}{7}; +\infty\right)$.

16. При яких значеннях параметра a рівняння $(x + 2)(a - 1) + 1 = a^2$: а) має єдиний розв'язок; б) має безліч розв'язків? ***Відповідь.*** а) $a \neq 1$; б) $a = 1$.

17. Визначте, при яких значеннях параметра k рівняння $3k + 3(x + 1) = \frac{3kx+15}{5}$: а) має єдиний розв'язок; б) не має розв'язків. ***Відповідь.*** а) $k = 5$; б) $k \neq 5$.

18. а) При яких значеннях параметра a рівняння $3x + 9 = a(a - x)$ має єдиний розв'язок; б) скільки коренів має це рівняння при $a = -3$? ***Відповідь.*** а) $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$; б) безліч.

19. При яких значеннях параметра a рівняння $x(a^2 - 8a + 15) = a^2 - 4a - 5$: 1) не має жодного кореня; 2) має безліч коренів; 3) має лише один корінь? ***Відповідь.*** 1) $a = 3$; 2) $a = 5$; 3) $a \neq 3$, $a \neq 5$.

20. При яких значеннях параметра a рівняння $ax - 7 = 4x - a$ матиме: 1) єдиний розв'язок; 2) нульовий розв'язок; 3) безліч розв'язків; 4) не матиме жодного розв'язку? ***Відповідь.*** 1) $a \neq 4$; 2) $a = 7$; 3) $a \in \varnothing$; 4) $a = 4$.

21. При яких значеннях параметра a рівняння $(a - 2)(x - 1) = a^2$: а) має розв'язок, що дорівнює 0; б) не має розв'язку? ***Відповідь.*** а) $a = -2$, $a = 1$; б) $a = 2$.

22. При яких значеннях параметра k рівняння $\frac{k}{2}(1 - x) = 1 + \frac{3}{2}x$ має розв'язок, що дорівнює нулю? ***Відповідь.*** $k = 2$.

23. Визначте кількість розв'язків рівняння $k^2x + 3 = k(x + 3)$ залежно від параметра k. ***Відповідь.*** якщо $k = 0$, то $x \in \varnothing$; якщо $k = 1$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $k \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то один розв'язок.

24. Дослідіть рівняння зі змінною x залежно від параметра:
1) $ax + 5 = 4x - 1$;
2) $k(x + 1) + 2 = 6(x + 1)$.

Відповідь. 1) Якщо $a \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$, то $x = \frac{6}{4-a}$; якщо $a \in (4; +\infty)$, то розв'язок буде від'ємним; якщо $a \in (-\infty; 4)$, то розв'язок буде додатнім; якщо $a = 4$, то $x \in \varnothing$; якщо $k \in (-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$, то $x = \frac{4-k}{k-6}$; якщо $k \in (-\infty; 4) \cup (6; +\infty)$, то розв'язок буде від'ємним; якщо $k \in (4; 6)$, то розв'язок буде додатним; якщо $k = 4$, то розв'язок дорівнюватиме нулю; якщо $k = 6$, то $x \in \varnothing$.

25. Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $3(x + 1) = 4 + ax$ матиме корінь більший, ніж -1. ***Відповідь.*** $a \in (-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$.

26. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких розв'язок рівняння $10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$ більший за 2. ***Відповідь.*** $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

27. Знайдіть усі значення параметра m, при кожному з яких розв'язок рівняння $5x - 18m = 21 - 5mx - m$ більший за 3. ***Відповідь.*** $m \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

28. Знайдіть усі значення параметра b, при кожному з яких розв'язок рівняння $14x + 8b = 8 + 2bx + 3b$ більший за 1. ***Відповідь.*** $b \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$.

29. Знайдіть усі значення параметра b, при кожному з яких розв'язок рівняння $6 - 3b + 4bx = 4b + 12x$ менший за 1. ***Відповідь.*** $b \in (-2; 3)$.

30. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких розв'язок рівняння $15x - 7a = 2 + 6a - 3ax$ менший за 2. ***Відповідь.*** $a \in (-5; 4)$.

31. Знайдіть усі значення параметра m, при кожному з яких розв'язок рівняння $16m - 40x = 5mx - 3m - 124$ менший за 3. ***Відповідь.*** $a \in (-8; -1)$.

Група Б

32. Розв'яжіть рівняння з параметром m:

1) $40x + 13m = \sqrt{m} + 15x$;

2) $40x + 12m = \sqrt{m-2} + 35x$.

Відповідь. 1) якщо $m \in (-\infty; 0)$, то задача не визначена (не має змісту); якщо $m \in [0; +\infty)$, то $x = \frac{\sqrt{m} - 13m}{25}$; 2) якщо $m \in (-\infty; 2)$, то задача не визначена (не має змісту); якщо $m \in [2; +\infty)$, то $x = \frac{\sqrt{m-2} - 12m}{5}$.

33. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2(a+1)x}{a} = 3(x+1) + \frac{7}{a}$ з параметром a;

2) $mx - \frac{3x}{m} - m = 7 - \frac{8}{m} - 2x$ з параметром m;

3) $\frac{x}{a} + \frac{a}{3} + \frac{x+a}{a+3} = 1$ з параметром a.

Відповідь. 1) якщо $a = 0$, то задача не визначена; якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = \frac{7+3a}{2-a}$; якщо $a = 2$, то $x \in \varnothing$; 2) якщо $m = 0$, то задача не визначена; якщо $m \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = \frac{m+8}{m+3}$; якщо $m = 1$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $m = -3$, то $x \in \varnothing$; 3) якщо $a = 0$ або $a = -3$, то задача не визначена; якщо $a \in (-\infty; -1{,}5) \cup (-1{,}5; +\infty)$, то $x = -\frac{a(a^2+3a-9)}{3(2a+3)}$; якщо $m = -1{,}5$, то $x \in \varnothing$.

34. Розв'яжіть рівняння з параметрами a, b:

1) $ax + b^2 = bx + a^2$;

2) $a^2(x - 1) = b(ax - b)$.

Відповідь. 1) якщо $a = b$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $a \neq b$, то $x = a + b$; 2) якщо $a = b$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то $x \in \varnothing$; якщо $a \neq b$ і $a \neq 0$, то $x = \frac{a+b}{a}$.

35. а) При яких значеннях параметрів a, b рівняння $4(x - a) = ax + b$ має єдиний розв'язок; б) скільки коренів має це рівняння при $a = 4$? ***Відповідь.*** а) якщо $a \neq 4$ і будь-яке b; б) якщо $a = 4$ і $b = -16$, то $x \in \mathbf{R}$; якщо $a = 4$ і $b \neq -16$, то $x \in \varnothing$.

Група В

36. Визначте, при яких значеннях параметра a корені рівняння $ax = 7x - 1$: а) кратні 3; б) кратні 5. ***Відповідь.*** а) $a = 7 - \frac{1}{3m}$, де $m = 1, 2, 3, \ldots$; б) $a = 7 - \frac{1}{5m}$, де $m = 1, 2, 3, \ldots$

МАТЕМАТИЧНІ АФОРИЗМИ

- «Життя прикрашають дві речі: можливість вивчати математику й можливість викладати її» (С. Пуассон)
- «Люди, що засвоїли великі принципи математики, мають на один орган чуття більше» (Ч. Дарвін)
- «Математику ще й тому вивчати слід, що вона розум до ладу доводить» (М. Ломоносов)
- «Математика – цариця наук, а арифметика – цариця математики» (К. Гаус)
- «Природа формує свої закони мовою математики» (Г. Галілей)
- «Натхнення потрібно в поезії, як і в геометрії» (О. Пушкін)
- «У величезному саду геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком» (Д. Гільберт)
- «Рано чи пізно кожна правильна математична ідея знайде своє застосування в тій чи іншій справі» (О. Крилов)