А.В.Прус, В.О.Швець

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

А.В.Прус, В.О.Швець

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України

Житомир
Рута - 2011

ББК 74.262.21
УДК 373.5 : 51 (08)
П 85

Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України. Лист N 1/11-6550 від 22.07.11

Рецензенти:
О. І. Скафа - доктор педагогічних наук, професор Донецького національного університету;
О. І. Матяш - кандидат педагогічних наук, доцент Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Прус А.В., Швець В.О.
Збірник задач з методики навчання математики. - Житомир: "Рута", 2011 - 388с.

Збірник задач містить більше 500 методичних задач із розв'язаннями, вказівками та відповідями, короткі теоретичні відомості щодо основних понять методики математики, близько 400 вправ з елементарної математики та відповідями до них, дві дидактичні гри, довідник.

Для викладачів, студентів фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів, педагогічних університетів, класичних університетів, які готують педагогів математичних спеціальностей, та для вчителів математики.

ISBN 978-617-581-056-9

ЗМІСТ

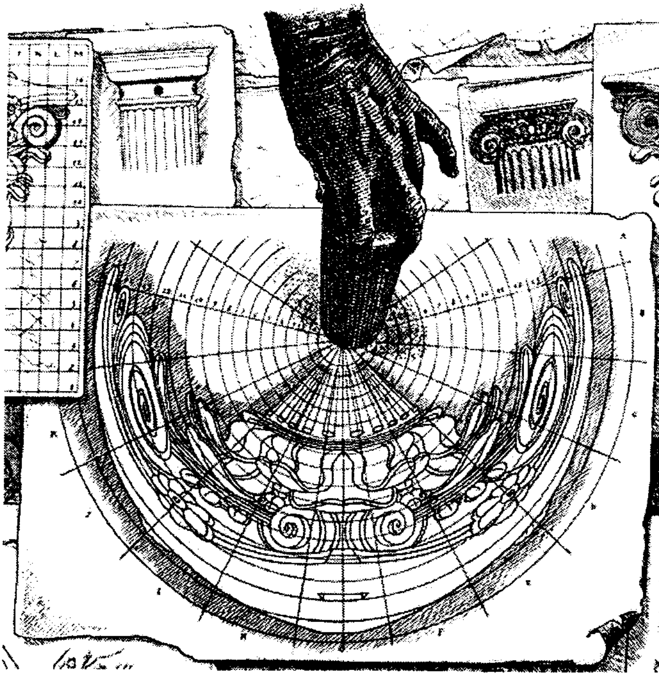

Рисунок Іштвана Ороса

ПЕРЕДМОВА

Приводом до написання даного посібника певною мірою слугувала … інша книга, як це не дивно. Це збірник задач із математики за редакцією М.І.Сканаві - відомий широкому загалу вчителів математики та школярам, які прагнуть навчитись розв'язувати задачі з математики. Зауважимо, є багато інших гарних збірників, проте збірник М.І.Сканаві, як на нашу думку, неперевершений ніким.

З методики навчання математики існують, а також створюються та видаються нові цікаві авторські методичні доробки, курси лекцій, інструкції для виконання практичних, лабораторних робіт. Проте збірників задач з навчальної дисципліни «Методика навчання математики», за деякими виключеннями, практично не було. Так, нам відомо лише про два-три збірники задач з методики математики. А так хотілось би, йдучи на заняття, взяти збірник задач, який містить все фундаментальне та цінне, що вже є в методиці математики, та те нове, що створене науковцями сьогодні. І в той же час щоб у студентів був не просто збірник задач, а порадник у вирішенні тих завдань, що поставатимуть перед ними на практиці під час роботи в школі. Тому ми взяли на себе сміливість створити такий збірник задач з методики навчання математики.

Збірник складається з передмови, двох частин, додаткових розділів, які містять дидактичні ігри, варіанти для самоперевірки та перевірки з елементарної математики, невеликого довідника, відповідей та списку використаної літератури. Перша частина складається із семи глав, які містять задачі із загальної методики навчання математики. До кожної глави цього розділу написані короткі теоретичні відомості. Друга частина має п'ять глав, які містять задачі із методики навчання окремих предметів. Усього у цих розділах міститься більше 500 задач. Особливістю нашого збірника вважаємо те, що для переважної кількості задач, крім відповідей, приведені розв'язання або вказівки. Це робить можливим використання даного збірника для дистанційного навчання, для заочного навчання, зокрема, для навчання на здобуття другої вищої освіти вчителя математики.

Додаткові розділи мають дві глави. Перша з них містить дві дидактичні гри на такі теми: «Функція» та «Розв'язування рівнянь та нерівностей». Зауважимо, що до другої дидактичної гри ми наводимо додатки з 394 вправами та відповідями до них з елементарної математики. Друга з цих глав містить варіанти завдань для самоперевірки та перевірки з елементарної математики. Зазначимо, що всі варіанти для самоперевірки та перевірки мають три рівні складності (перший рівень складений у тестовій формі) та мають відповіді.

У тексті збірника задач зустрічаються короткі, корисні та цікаві, на наш погляд, повідомлення, зокрема, про визначних людей, про інновації в освіті тощо. Текст книги прикрашають висловлювання визначних людей, пов'язані з навчанням, математикою тощо та приголомшливі ілюстрації до математичних ідей відомого голландського художника Моріса Ешера та його послідовників: фламандського художника Жос де Мей, швейцарського художника Сандро дель Пре, угорського художника Іштвана Ороса, іспанського художника та професора математики Вісенте Мевілла Сегуі.

Автори виражають щиру вдячність доктору педагогічних наук, професору Донецького національного університету О. І. Скафі, кандидату педагогічних наук, доценту Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського О. І. Матяш, вчителю вищої категорії міської гімназії №3 міста Житомира С.С. Удовкіній за цінні поради у процесі роботи над книгою, які сприяли її поліпшенню.

Слід зазначити, що ця книга - наш перший досвід у написанні саме збірника методичних задач. Він не претендує на повноту.

Створювалась книга з любов'ю. І нам би дуже хотілось, щоб це був дійсно корисний продукт для викладачів методики математики, для студентів педагогічних спеціальностей, для вчителів-початківців. Ми представляємо цей збірник вам, шановні колеги, та сподіваємось, що ви будете його використовувати у своїй роботі з таким же задоволенням, з яким він був написаний. Будемо вдячні за відгуки, поради щодо покращення збірника, конструктивну критику. Їх просимо надсилати за такими адресами: 01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9, НПУ імені М. П. Драгоманова, кафедра математики і методики викладання математики або 10008, м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40, ЖДУ імені Івана Франка, кафедра математики.

З повагою, автори.

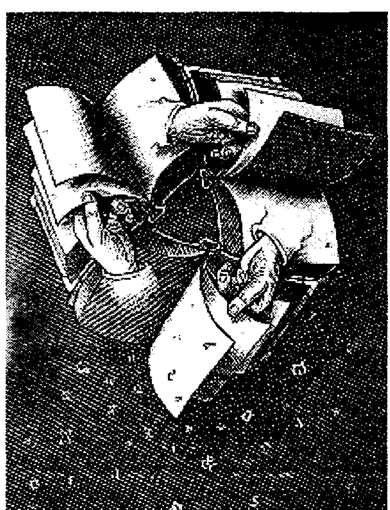

Рисунок Іштвана Ороса

ЧАСТИНА I. ЗАГАЛЬНА МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

ГЛАВА 1. ОКРЕМІ ПИТАННЯ ЗАГАЛЬНОЇ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Методика навчання математики не тільки наука, але й мистецтво.

Л. Д. Кудрявцев

Основні поняття

Методика навчання математики (скорочено – методика математики) – це наука про математику як навчальний предмет і закономірності процесу навчання математики учнів різних вікових груп. "Методика" - слово грецького походження ("метод" - шлях). Назву "Методика математики" запропонував у 1836 році А. Дістервег. В перекладі ця назва означає: "Шлях до математики". Вперше методика математики виникла у працях швейцарського педагога Г. Песталоцці (1746 - 1827). Науковою дисципліною стала лише на початку XIX ст. Окремі питання стосовно методики навчання математики див. на рис. А, Б.

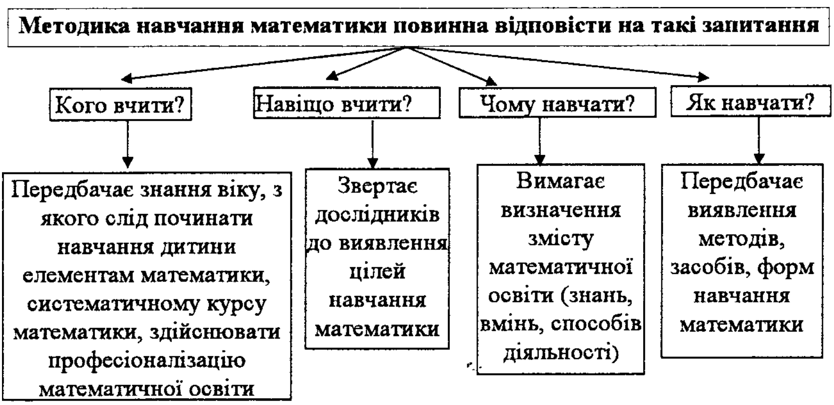

Рис. А

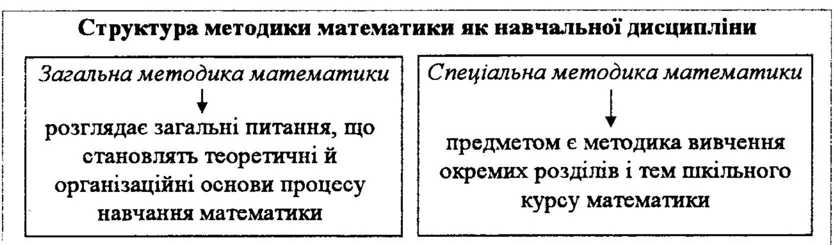

Рис. Б

Об'єктом методики навчання математики є математична освіта, навчання математики і виховання засобами математики. Математична освіта передбачає не лише розвиток особистості засобами математики, але й оволодіння системою знань, що формує уявлення про предмет математики, методи математичного дослідження, основні поняттях, способи обґрунтування математичних фактів, використанні математики в дослідженні явищ природи та суспільства.

Предметом методики навчання математики є спеціальна методична система, яку складають цілі та зміст математичної освіти, методи, засоби, форми навчання, індивідуальність учня та результати навчання.

Щоб забезпечити глибокі, міцні, системні знання, необхідно використовувати *комплексний підхід* до процесу навчання. Такий підхід є наслідком застосування закону діалектики, що вимагає будь-яке явище розглядати у всіх зв'язках і опосередкуваннях, брати кожне з них в єдності спільного, особливого, одиничного.

Основна теза *діяльнісного підходу* у розвитку особистості полягає в тому, що людина виявляє властивості та зв'язки елементів реального світу лише у процесі і на основі різних видів діяльності (предметної, розумової, індивідуальної, колективної тощо). *Компетентнісний підхід* висуває на перше місце не інформованість учня, а вміння розв'язувати проблеми, які виникають у наступних ситуаціях: 1) у пізнанні та поясненні явищ дійсності; 2) під час освоєння сучасної техніки і технології; 3) у взаєминах людей; 4) у практичному житті; 5) у правових нормах; 6) під час вибору професії; 7) під час необхідності розв'язувати власні проблеми.

Гуманізація освіти передбачає таку організацію навчального процесу, при якій знання мали б для учня особистісний смисл. Поняття «гуманізм» походить від латинського слова, що означає «людяний». Важливими умовами гуманізації освіти є посилення мотивації та диференціації навчання. *Гуманітаризація освіти* повинна створити умови, які спонукають учня до активної творчої діяльності та забезпечують його участь в ній. Слово *«гуманітарний»* походить від лат. «духовна культура». Сенс гуманітаризації в тому, щоб залучити учня до духовної культури, творчої діяльності, озброїти його методами наукового пошуку, серед яких особливу роль грають евристичні прийоми і методи наукового пізнання.

Особистісно-орієнтоване навчання передбачає використання досвіду учня, залучення його до конструювання процесу навчання, творчості, формування відповідальності за виконану роботу, врахування індивідуальних особливостей учня, акцент на розвиток його здібностей, самостійності, ініціативи.

Прикладна спрямованість математики – це орієнтація цілей, змісту та засобів навчання математики у напрямку набуття учнями у процесі математичного моделювання знань, умінь та навичок, які використовуватимуться ними у різних сферах життя. Математичне моделювання пов'язане із математизацією ситуації – створенням математичних моделей, що дозволяють досліджувати реальність засобами математики. При математичному моделюванні ми маємо справу не з об'єктом, а з побудованою його теоретичною копією, яка виражає у математичній формі його основні закономірності. Під час розв'язування прикладних задач використовується метод математичного моделювання. Будемо називати прикладними задачі, які виникають за межами математики, але розв'язування яких вимагає застосування математичного апарату. Можна визначити такі етапи розв'язування прикладної задачі: попередній аналіз об'єкта дослідження; формалізація; розв'язування задачі всередині побудованої моделі; інтерпретація.

Навчальні цілі - ідеальне уявлення результату, який має бути досягнутий у ході вивчення тієї чи іншої навчальної теми. Цілі навчання математики: розвиваючі, загальноосвітні, виховні. Відомими є різні способи постановки цілей навчання: 1) визначення цілей через зміст матеріалу, що вивчається; 2) визначення цілей через діяльність учителя; 3) постановка цілей через внутрішні процеси інтелектуального, емоційного, особистісного розвитку учня; 4) постановка цілей через навчальну діяльність учнів. Для правильного формулювання мети уроку необхідно пам'ятати правила її постановки, враховувати такі моменти: програмові вимоги, зміст матеріалу, необхідний рівень знань і вмінь учнів, місце уроку в системі уроків за певною темою, підготовленість учнів класу, свої можливості, тип та вид уроку, кінцевий результат. Формулювання цілей може починатись із дієслова неозначеної форми або наказового способу (за пропозиціями Дж. Л. Моррісея). Також у методичній літературі під час формулювання цілей часто вживають іменники на зразок «формування», «узагальнення», «перевірка», «повторення» та ін.

Традиційно до *матеріальних засобів навчання* математики відносять підручник математики (головний засіб), різноманітні посібники дидактичного, довідкового чи пізнавального спрямування, навчальне обладнання з математики, комп'ютери із відповідним педагогічним програмним забезпеченням. У діяльності вчителя, учнів використовуються не тільки предметні, але й *моторні* (побудова дослідів, показ практичної діяльності) та *інтелектуальні* (логічні, конструктивні) засоби навчання.

Методичні задачі

1.1. Проаналізуйте написані нижче два способи введення одного й того самого поняття, дайте відповідь на запитання: а) які методи формування нового поняття тут використовувались? б) у чому різниця цих методів? в) від яких факторів залежить доцільність використання кожного з цих методів у старшій та основній школі?

1-й спосіб. «Тема сьогоднішнього уроку – «Рівність фігур». Дві фігури називаються рівними, якщо вони переводяться рухом одна в одну. Для позначення рівності фігур використовують звичайний знак рівності. Запис $F = F_1$ означає, що фігура F дорівнює фігурі F_1. Рівність трикутників, що визначається через їхнє суміщення рухом, і рівність, як ми розуміли її дотепер, виражають одне й те саме».

2-й спосіб. «Ми вже знаємо, в яких випадках називають рівними два відрізки, два кути, два трикутники. Але рівними можуть бути й інші фігури, наприклад, два прямокутники, дві трапеції, два кола. Розглянемо дві фігури, зображені на рис. 1.6(а). Чи рівні вони? Ні. А фігури, зображені на рис. 1.6(б)?

Ні. Фігури, які зображені на рис. 1.6(в)? Рівні. Чому? Зверніть увагу ще на рис. 1.6 (г), 1.6 (д), 1.6 (е).

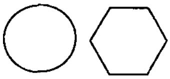
Рис. 1.6 (а)

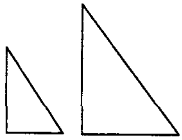
Рис. 1.6 (б)

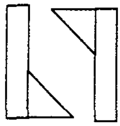
Рис. 1.6 (в)

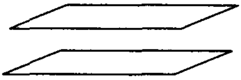
Рис. 1.6 (г)

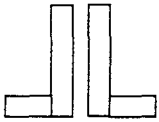
Рис. 1.6 (д)

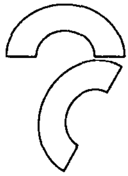
Рис. 1.6 (е)

Пару фігур, зображених на рис. 1.6 (г), можна сумістити паралельним перенесенням, фігури на рис. 1.6 (д) – методом осьової симетрії, фігури на рис. 1.6 (е) – поворотом. Паралельне перенесення, осьова симетрія, поворот – все це рухи. Ось чому в геометрії домовились рівними називати лише такі фігури, які рухом переводяться одна в одну. Отже, дві фігури називаються рівними...» і т.д.

1.2. Висловіть свою думку з приводу того, що конкретно-індуктивний метод, як часто вважають, можна застосовувати лише в молодшій і основній школі, а абстрактно-дедуктивний – у старшій школі. Яким методом доцільно вводити такі поняття: а) неправильного дробу; б) прямокутника; в) квадрата; г) ромба; д) границі числової послідовності?

1.3. Метод викладення матеріалу крупними блоками найповніше розробив П.М.Ердніев. Він показав, що цей метод дозволяє зіставляти, протиставляти, співпідпорядковувати окремі поняття, алгоритми, задачі, які під час вивчення їх малими дозами виявляються роз'єднаними, ізольованими одна від одної, а навчання без порівнянь, зіставлень, встановлення зв'язків є менш ефективним. В головному з ним слід погодитись. Досвід навчання на основі укрупнення дидактичних одиниць засвоєння показав, що основною формою математичної вправи має стати багатокомпонентне завдання, що, наприклад, поєднує такі частини: а) розв'язування звичайної «готової» задачі; б) складання оберненої задачі та її розв'язування; в) складання аналогічної задачі за даною формулою (тотожністю) або рівнянням і розв'язування її; г) розв'язування або складання задач за деякими елементами, які спільні з початковою задачею. Наведемо далі приклад такого укрупненого завдання. Розв'яжіть його. Придумайте укрупнене завдання для розв'язування задач в основній школі: 1) на рух; 2) на роботу.

Укрупнене завдання. а) Розв'яжіть задачу шляхом складання рівняння: «На подвір'ї кури та кролі, причому число голів дорівнює 19, а число ніг 54. Скільки було курей, кролів?».

б) Складіть умову аналогічної задачі за рівнянням $4 \cdot b + 2 \cdot (10 - b) = 38$. Розв'яжіть цю задачу.

в) Складіть і розв'яжіть задачу шляхом складання рівняння з однією змінною про число вершин трикутників і квадратів, виходячи із такої рівності (скільки було квадратів?): $4 \cdot 8 + 3 \cdot (15 - 8) = 53$.

г) складіть і розв'яжіть задачу, що схожа на попередні.

1.4. Значна частина помилок в усному мовленні пов'язана з наголошуванням слів. Поставте наголоси в таких словах:

абиякий	кількаразовий	підкореневий
будь-який	комплексний	площина
ввести	косинець	поєднання
вищеназваний	множина	поняття
відобразити	навести	похибка
дано	навколо	предмет
дециметр	начебто	проміжок
добуток	нескінченний	сегмент
доповісти	об'єднання	середина
доцентровий	об'єм	симетрія
завдання	одинадцять	складова
запитання	ознака	сполучний
зсередини	паралелограм	чотирнадцять
кілометр		

1.5. Іноді спостерігається порушення встановленої системи відмінювання математичних слів-термінів, з використанням яких у своїй лексиці вчителям математики постійно доводиться мати справу під час проведення уроків. Зокрема, є особливості вживання слів у родовому відмінку. Виберіть слова в таблиці 1.1, закінчення яких записані правильно:

Таблиця 1.1

Слова-терміни у родовому відмінку: *як правильно*?

№	*а)*	*б)*	№	*а)*	*б)*
1	дециметра	дециметру	15	мільярда	мільярду
2	ара	ару	16	аргумента	аргументу
3	відсотка	відсотку	17	процеса	процесу
4	елемента	елементу	18	метода	методу
5	сегмента	сегменту	19	приклада	прикладу
6	радіуса	радіусу	20	простора	простору
7	паралелепіпеда	паралелепіпеду	21	вираза	виразу
8	паралелограма	паралелограму	22	вигляда	вигляду
9	трикутника	трикутнику	23	добутка	добутку
10	тангенса	тангенсу	24	розв'язка	розв'язку
11	променя	променю	25	перетина	перетину
12	циркуля	циркулю	26	максимума	максимуму
13	олівця	олівцю	27	інтервала	інтервалу
14	відрізка	відрізку			

1.6 У своїй професійній діяльності вчитель математики іноді не дотримується стилістичних та синтаксичних норм висловлювання. Оберіть як буде правильно.

1): а) Проведемо розв'язання нерівності методом інтервалів; б) проведемо розв'язування нерівності методом інтервалів?

2): а) Перепишемо повне розв'язування задачі у зошити; б) перепишемо повний розв'язок задачі у зошити; в) перепишемо повне розв'язання задачі у зошити?

3): а) розв'язання задачі правильне; б) розв'язок прикладу проведемо самостійно?

1.7. Потрібно пильнувати, щоб кожне слово (особливо спеціальні терміни) вживались із властивим їм значенням. Оберіть правильний варіант.

1): а) квадратне рівняння має такий вид; б) квадратне рівняння має такий вигляд?

2): а) звідси слідує вірність твердження; б) звідси випливає істинність твердження?

3): а) перевірка показала, що рівняння розв'язане правильно; б) перевірка показала, що рівняння розв'язане вірно?

4): а) диференціювання по змінній; б) диференціювання за змінною.

1.8. Під час читання числівників можна припуститись помилок. Перевірте свої знання, оберіть у таблиці 1.2 ту колонку, у якій, на ваш погляд, числівники написані правильно.

Таблиця 1.2

Де числівники написані правильно?

1 колонка	*2 колонка*
двічі два	два по два
шість у шість	шість по шість
семидесяти	сімдесяти
семидесятий	сімдесятий
сімсотий	семисотий
шестидесяти	шістдесяти
вісімсотий	восьмисотий
восьмидесятий	вісімдесятий

1.9. Щоб успішно попереджувати та виправляти *учнівські помилки*, треба їх вивчати (фіксувати і класифікувати), звертаючи особливу увагу на найбільш поширені, типові з них.

1) Типовим недоліком мови учнів є нечітке вираження категорії кількості, підміна її предметними поняттями, наприклад: «Ми всю землю приймаємо за одиницю»; «Всі дубові шафи позначимо через x». Як слід виправляти помилки у таких випадках?

2) Поширеною помилкою є пропуск слів у реченнях, наприклад: «Рівні похилі мають і рівні проекції»; «Кожний кут многокутника дорівнює...». Як сказати правильно?

3) Непоодиноким є неправильне вказування об'єкта, над яким виконується дія, наприклад: «Поділимо рівність на a»; «Додамо ці дві рівності». Як виправити ці хиби?

4) Учні часто вживають словосполучення (речення) не ті, що потрібні в тому чи іншому випадку, наприклад: «Ці члени скорочуються»; «Рівняння не змінилось»; «Рівняння більше від нуля»; «Вітки параболи будуть підняті вгору»; «У рівнянні $5(2x-1)(x+5)=0$ є дві змінні». Як виправити такі помилки?

5) Часто трапляється неправильне вживання відмінків, наприклад: «треба до ста двадцять шість додати двісті тридцять вісім». Як сказати правильно?

6) Поширені стилістичні помилки: «Нам треба довести формулу». Як сказати правильно?

7) Нерідко зустрічаються русизми, наприклад: «слідуючий», «рівняється», «рішати». Як сказати правильно українською мовою?

1.10. Ознайомтесь із варіантом календарного плану з алгебри на I семестр (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Календарний план

№ уроку	Теми, види письмових робіт	Дата уроку	Примітки
1-2	Повторення навчального матеріалу за попередні класи		
	I. Раціональні вирази		
3-4	Цілі і дробові алгебраїчні вирази. Допустимі значення змінних		
5-6	Основна властивість раціональних дробів. Скорочення раціональних дробів і зведення їх до спільного знаменника. Зміна знака чисельника і знаменника раціонального дробу		
7-8	Додавання і віднімання раціональних дробів		
9-10	Розв'язування вправ. *Самостійна робота*		
11-12	Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціональних дробів до степеня з натуральним показником		
13-14	Тотожні перетворення раціональних виразів		
15-16	Рівняння із змінною в знаменнику		
17-18	Розв'язування вправ. *Самостійна робота*		
19	*Тематична контрольна робота*		
20	Резервний урок		
21-22	Степінь з цілим показником. Властивості степеня з цілим показником		
23	Стандартний вигляд числа. Запис чисел у стандартному вигляді. Порядок числа		
24-25	Тотожні перетворення виразів із степенями		
26-27	Розв'язування задач і вправ. *Самостійна робота*		

28-29	Функція $y=\frac{k}{x}$, її графік і властивості		
30	*Тематична контрольна робота*		
31	Резервний урок		
32	Узагальнююче повторення вивченого матеріалу		
Семестрове оцінювання			

Дайте відповіді на такі запитання: 1) якими засобами, крім відповідної програми з математики, користується вчитель при написанні плану; 2) для якого класу написаний цей план; 3) чи потрібно було вказати у плані, що саме потрібно повторити; 4) чи не потрібно, на ваш погляд, провести ще самостійні роботи, наприклад, після вивчення тотожних перетворень раціональних виразів, після вивчення функції $y=\frac{k}{x}$; 5) які ще зміни ви хотіли б внести до цього календарного плану?

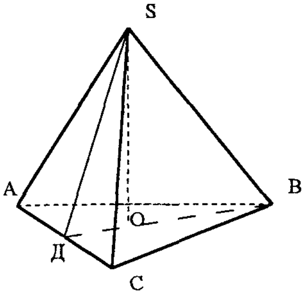

Рис. 1.2

1.11. Прочитайте умову задачі та аналітичні міркування щодо її розв'язування. Проведіть синтетичні міркування щодо розв'язування задачі.

Задача. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а радіус кола, вписаного в основу, $\sqrt{3}$ см. Знайдіть повну поверхню піраміди (рис. 1.2).

Аналітичні міркування. Оскільки повна поверхня правильної трикутної піраміди дорівнює $S_п = S_{осн} + S_б = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\cdot 3a\cdot l$, де a — сторона основи, а l — апофема бічної грані, то для розв'язання задачі досить знайти сторону основи a. За умовою задачі дано радіус DO вписаного кола правильного трикутника ABC. Але BD є висотою, бісектрисою і медіаною, тому $DO=\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$. Звідси знаходимо сторону основи і повну поверхню піраміди.

1.12. Прочитайте умову задачі та синтетичні міркування щодо її розв'язування. Проведіть аналітичні міркування щодо розв'язування задачі.

Задача. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює b, а двогранний кут при основі α. Знайдіть бічну поверхню піраміди (рис. 1.3).

Синтетичні міркування. Позначимо сторону основи $AD=a$. Тоді $OM=\frac{1}{2}a$.

З $\Delta SMO(\angle O=90^\circ)$: $SM=\frac{a}{2\cos\alpha}$. З $\Delta ACD(\angle D=90^\circ)$: $AC=a\sqrt{2}, AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

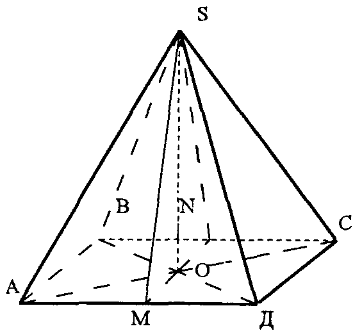

Рис. 1.3

З $\Delta SOM\,(\angle O=90^{0})$: $SO=\frac{a}{2}tg\alpha$.

З $\Delta SAO(\angle O=90^{0})$:

$$SO=\sqrt{SA^{2}-AO^{2}}=\sqrt{b^{2}-\frac{a^{2}}{2}}.$$

Звідси маємо: $\frac{a}{2}tg\alpha=\sqrt{b^{2}-\frac{a^{2}}{2}}$,

тобто $\frac{a^{2}}{4}tg^{2}\alpha=b^{2}-\frac{a^{2}}{2}$; $\frac{a^{2}}{4}(tg^{2}\alpha+2)=b^{2}$;

$$a=\frac{2b}{\sqrt{tg^{2}\alpha+2}};\qquad P=\frac{8b}{\sqrt{tg^{2}\alpha+2}}.$$

$$SM=\frac{a}{2\cos\alpha}=\frac{2b}{2\cos\alpha\sqrt{tg^{2}\alpha+2}}=\frac{b}{\cos\alpha\sqrt{tg^{2}\alpha+2}}.$$

$$S_{б}=\frac{1}{2}P\cdot SM=\frac{1}{2}\cdot\frac{8b}{\sqrt{tg^{2}\alpha+2}}\cdot\frac{b}{\cos\alpha\sqrt{tg^{2}\alpha+2}}=\frac{4b^{2}\cos\alpha}{\cos^{2}\alpha+1}.$$

1.13. Дано задачу: «Турист пройшов 27,5 км. Спочатку він рухався із швидкістю $4{,}5\frac{км}{год}$. А потім 4 години йшов з швидкістю $3{,}5\frac{км}{год}$. Скільки годин йшов турист з більшою швидкістю?». Проведіть міркування із розв'язування задачі за допомогою аналізу, а потім – синтезу (повне розв'язання наводити непотрібно).

1.14. Учень розв'язував таку задачу: на осі абсцис знайти точку, відстань якої від точки $(0;0)$ удвічі менша за її відстань від точки $(12;0)$. В результаті отримав відповідь: $x=4$. Чи правильно розв'язано задачу? Якщо «ні», то приведіть правильне розв'язання та вкажіть причину неправильного розв'язку.

1.15. Учень розв'язував таку задачу: з'ясуйте, за якої умови правильна рівність $|a-b|=|a|+|b|$, та запишіть цю умову коротко. В результаті отримав відповідь: $ab<0$. Чи правильно розв'язано задачу? Якщо «ні», то приведіть правильне розв'язання та вкажіть причину неправильного розв'язку.

1.16. Учень правильно розв'язує систему рівнянь $\begin{cases}2ax+by=c,\\3ax-2by=d\end{cases}$, якщо x і y прийняті за невідомі, і утруднюється розв'язати цю ж систему, якщо за невідомі прийняті a і b. На Вашу думку, в учня має місце формальне знання чи це незнання матеріалу?

1.17. Складіть варіант повідомлення вчителя для учнів про необхідність уміння вимірювати кути.

1.18. У Державному стандарті базової і повної середньої освіти записано, що основною метою освітньої галузі «Математика» є: опанування учнями системи математичних знань, навичок і умінь, необхідних у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервної освіти; формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї і методи математики, її роль у пізнанні дійсності; інтелектуальний розвиток учнів (логічного мислення і просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, пам'яті, уваги, інтуїції); економічне, екологічне, естетичне, громадянське виховання, формування позитивних рис особистості. Дайте відповіді на такі запитання: 1) які види цілей зазначені в цьому документі; 2) яка основна мета школи і які цілі їй підпорядковані; 3) чи можна вважати постановку мети уроку одним із основних його етапів; 4) як у загальному має формулюватись мета кожного конкретного уроку; 5) чому не можна ототожнювати поняття «мета уроку» і «завдання уроку»?

1.19. Важливим елементом методики вивчення чисел є *мотивація*, тобто, певною мірою, доведення учням доцільності введення нових чисел. Можливість записати частини цілого за допомогою звичайних дробів є одним із прийомів переконування учнів в корисності таких дробів. Назвіть два прийоми, крім наведеного, які показують необхідність введення дробових чисел. Проілюструйте їх.

1.20. *Спостереження та досвід* у навчанні математики грають важливу роль. Наведемо приклади їх доцільного використання. Для того, щоб ознайомити учнів із поняттям площі, периметра, рівновеликих фігур, можна запропонувати їм серію вправ, графічною опорою яким будуть об'єкти, які зображені на рис. 1.5. Придумайте таку систему вправ.

Рис. 1.5(а)

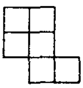

Рис. 1.5(б)

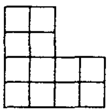

Рис. 1.5(в)

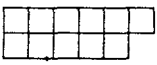

Рис. 1.5(г)

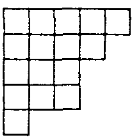

Рис. 1.5(д)

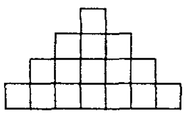

Рис. 1.5(е)

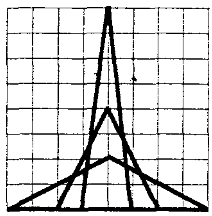

Рис. 1.5(ж)

1.21. На самостійне вивчення пропонується матеріал, легший або аналогічний опрацьованому в класі. Заповніть таблицю 1.4, використовуючи цю тезу.

Таблиця 1.4

Організація самостійної роботи учнів

№	*Опрацьовано з учителем*	*Можна задати для самостійного вивчення*
1	Ознака подільності на 3	
2		Віднімання десяткових дробів
3		Виведення формул $(a-b)^2$, $(a-b)^3$, a^3-b^3

4	Графіки функцій: $y=x^2$, $y=ax^2$, $y=(x+m)^2$, де $a>1$, $m>0$	
5	Побудова відрізка $x=\sqrt{a^2-b^2}$	
6	Правило зведення тригонометричних функцій для кутів $90°\pm\alpha$ і $180°\pm\alpha$ до тригонометричних функцій гострого кута	

1.22. У конспектах уроків можна знайти такі формулювання цілей: 1) сформувати уявлення про функцію; 2) продовжити вивчення теми «Квадратне рівняння»; 3) поглибити знання учнів з теми «Правильні многогранники»; 4) сформувати навички й уміння зводити подібні члени многочлена; 5) закріпити вміння учнів з теми «Формули скороченого множення»; 6) узагальнити та систематизувати знання про квадратичну функцію; 7) перевірити й оцінити знання й уміння учнів диференціювати складені функції; 8) повторити додавання дробів із різними знаменниками; 9) розширити уявлення учнів про числа. Визначте, які цілі можна вважати правильними з дидактичного погляду (відповідь поясніть).

1.23. 1. Сформулюйте мету уроку на тему «Що таке функція» та цільові завдання (для вчителя). 2. Сформулюйте мету уроку на тему «Вертикальні кути» та поставте цільові завдання перед учнями.

1.24. Організовуючи на уроці розв'язування учнями усних вправ з алгебри, вчитель не повинен перетворювати ці вправи у самоціль: не слід в якості усних вправ пропонувати дуже складні перетворення, громіздкі вирази. Наприклад, для осмислення учнями нової області чисел – раціональних, можна запропонувати для усного розв'язування наступні вправи. Розв'яжіть їх. Придумайте усні вправи для таких тем: а) розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною; б) розв'язування квадратних нерівностей.

1) Назвіть декілька числових значень

для c, якщо $c<0$;	для n, якщо $n>-3$;
для a, якщо $a>0$;	для k, якщо $k<-5$

2) Який знак поставити у виразі $a-b\vee 0$ при $|a|>|b|$

якщо $a<0,\ b>0$;	якщо $a>0,\ b>0$;
якщо $a>0,\ b<0$;	якщо $a\le 0,\ b<0$?

3) Як зміниться добуток $-3x$ при зменшенні x?

4) Яке значення c, якщо $5c<c$?

5) Знайдіть числове значення виразу $y=x^3-2x^2+1$ для x, що дорівнює -2; -1; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$; 1; 2.

6) Назвіть таке значення b, щоб $b^2>b$ і в той же час $2b<b$.

7) Яке найменше можливе значення $(-a)^2$; $(a-1)^2$; $(a+3)^2$; $(2a-4)^2$; $(3a-5)^2$, при яких значеннях a його отримують?

8) Визначте допустимі значення x у виразах: $\frac{5}{3-x}$; $\frac{4}{2-3x}$; $-\frac{2}{x^2-9}$; $\frac{3}{(x+1)\cdot(x-1)}$.

9) Визначте, чи може вираз $\frac{m}{3}$ бути більшим, дорівнювати і меншим за 1? Якщо так, то за яких умов?

10) Визначте, чи може вираз $4a$ дорівнювати нулю; бути більшим за нуль; бути меншим за нуль?

1.25. Закінчіть речення. Усні вправи сприяють: 1) засвоєнню основних ...; 2) розвитку логічного мислення учнів та навичок елементарних ...; 3) вдосконаленню обчислювальних ...; 4) вдосконаленню навичок раціональних ...; 5) систематичному ...

1.26. Ознайомтесь із цілями, які визначені через діяльність учителя: 1) сформувати уявлення про числові нерівності; 2) сформувати уявлення про конус; 3) сформувати вміння та навички скорочувати дроби; 4) сформувати вміння розв'язувати трикутники; 5) повторити розв'язування вправ і задач на арифметичну та геометричну прогресії. Переформулюйте ці цілі через навчальну діяльність учнів.

1.27. Зробіть загальний висновок відносно добутку на основі таких прикладів: $12\cdot 3=36$, $12\cdot 2=24$, $12\cdot\frac{4}{3}=16$, $12\cdot 1=12$, $12\cdot\frac{3}{4}=9$, $12\cdot\frac{1}{2}=6$, $12\cdot\frac{1}{6}=2$.

1.28. Урахування асиметричності півкуль головного мозку людини під час розв'язування проблем навчання математики, як свідчать дослідження методистів та науковців, приводить до висновку про важливість «геометризації» математичних знань. У результаті підключення парних механізмів мислення набуває ніби нової якості, а докази - більшої переконливості.

Розглянемо ряд наступних сум: $1+2+1=4=2^2$; $1+2+3+2+1=9=3^2$; $1+2+3+4+3+2+1=16=4^2$ і т.д. Знаходження суми такого ряду алгебраїчним шляхом (обчисленням суми двох прогресій) – це шлях нескладний, але невиразний. Якщо застосувати до цього ряду «рисунковий підхід», ми отримаємо досить переконливе виведення суми ряду. Виконайте такий підхід (це дозволить підключити механізм обробки інформації, який використовує права півкуля мозку).

Рисунок Сандро дель Пре

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Барыбин К.С. Методика преподавания алгебры: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1965. – 344 с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання алгебри: Посібник для вчителя. - К.: Вища шк., 1971. – 272 с.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики. – К.: Вища шк., 1977. – 376 с.
4. Бевз Г.П. Методи навчання математики. – Харків: Вид. група "Основа", 2003.- 96с. – (Серія 'Бібліотека журналу "Математика в школах України"; Вип. 4).
5. Бевз Г.П. Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
6. Брадіс В.М. Методика викладання математики в середній школі. - К.: Рад. шк., 1951. – 472 с.
7. Бурда М.І. Розв'язування задач на побудову в 6-8 класах: Метод. посібник. – К.: Рад. шк., 1986. – 112 с.
8. Власенко О.І. Методика викладання математики. Загальні питання. - К.: Вища шк., 1974. – 208 с.
9. Гастева С.А., Крельштейн Б.И., Ляпин С.Е., Шидловская М.М. Методика преподавания математики в восьмилетней школе. - М.: Просвещение, 1965. – 744 с.
10. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителей. - М.: Просвещение, 1981. – 95 с.
11. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
12. Эрдниев П.М. Преподавание математики в школе. - М.: Просвещение, 1978. – 304 с.
13. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1986. – 255 с.
14. Жовнір Я.М., Євдокимов В.І. 500 задач з методики викладання математики: Навч. посібник. – Х.: Основа, 1997. – 392 с.
15. Збірник задач з математики для вступників до втузів / В.К. Єгерев, В.В.Зайцев, Б.А.Кордемський та ін.; За ред. М.І.Сканаві. – К.: Вища школа, 1992. – 445 с.
16. Мерзляк А.Г. та ін. Алгебраїчний тренажер: Посібник для школярів та абітурієнтів / А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір. – К.: А.С.К., 1997. – 320 с.
17. Математика в афоризмах, цитатах, высказываниях / Сост. Н.А. Вирченко.- К.: Высш. шк. – 1983. – 278 с.
18. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А.Я. Блох, Е.С. Канин, Н.Г. Килина. - М.: Просвещение, 1985. – 336 с.
19. Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по геометрии. Учеб.-метод. пособие. – К.: «Магистр-S», 1996. – 256 с.

20. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие. – Мн.: Вышэйшая шк., 1990. – 267 с.
21. Салмина Н.Г. Знак и символ в обучении. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 236с.
22. Самусенко А.В., Казаченок В.В. Математика: Типичные ошибки абитуриентов: Справ. пособие. – Мн. Выш. шк., 1991. – 189 с.
23. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.
24. Саранцев Г.И. Сборник упражнений по методике преподавания математики в средней школе: Учеб. Пособие для студентов-заочников III-IV курсов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. - М.: Просвещение, 1983. – 80 с.
25. Слєпкань З.І. Методика викладання алгебри і початків аналізу. – К., Рад. школа, 1978. – 224 с.
26. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак - ЕКО, 2000. – 512 с.
27. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики: Монографія. – Черкаси: Відлуння-плюс, 2002. – 400 с.
28. Фридман Л. М. Учитесь учиться математике: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 1985. – 112 с.
29. Цукарь А.Я. Упражнения на развитие пространственного воображения // Математика в школе. – 2002. - №9. - С.14-18.
30. Шаталов В.Ф. Геометрия в лицах. – М.: ЗАО ИПЦ «Дортранспечать», 2006. – 32 с.
31. Швець В.О., Прус А.В. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І.Франка, 2007. – 156 с.
32. Яремчук Ф.П., Рудченко П.А. Алгебра и элементарные функции: Справочник. – К.: Наукова думка, 1987. – 648 с.

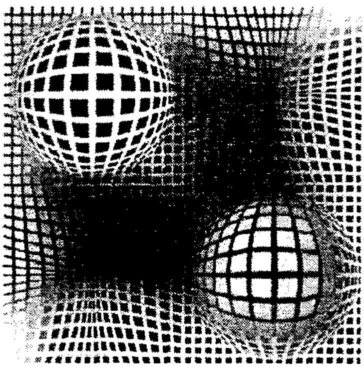

Рисунок Жос де Мей