

# **ПРАКТИКУМ З МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНА ШКОЛА**

Навчальний посібник для студентів  
математичних спеціальностей  
педагогічних університетів

За редакцією професора В. О. Швеця

РЕКОМЕНДОВАНО МІНІСТЕРСТВОМ  
ОСВІТИ І НАУКИ,  
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

*Нашому вчителю, колезі,  
незабутньому професору кафедри математики і  
теорії та методики навчання математики  
НПУ імені М. П. Драгоманова  
СЛЄПКАНЬ ЗІНАІДІ ІВАНІВНІ  
присвячується*

# **ПРАКТИКУМ З МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ. ОСНОВНА ШКОЛА**

*Навчальний посібник для студентів  
математичних спеціальностей  
педагогічних університетів*

За редакцією професора В. О. Швеця

*Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України*

**Київ  
Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова  
2012**

УДК 373.5.016:51(076)

ББК 74.262я73-5

П 69

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України  
як навчальний посібник для студентів  
математичних спеціальностей педагогічних університетів  
(Лист № 1/11-6551 від 22.07.2011 рік)*

**Рецензенти:**

***О. І. Скафа***, доктор педагогічних наук, професор (Донецький національний університет);

***Л. Г. Філон***, кандидат педагогічних наук, доцент (Чернігівський національний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка);

***Л. В. Тополя***, кандидат педагогічних наук, доцент (Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова).

**П 69** Практикум з методики навчання математики. Основна школа : навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / за редакцією В. О. Швеця – К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. – 267 с.

ISBN 978-966-660-820-1

Пропонований навчальний посібник адресований студентам і викладачам для організації та проведення практичних занять з методики навчання математики в 5-6-х класах, алгебри та геометрії в 7-9-х класах. Він призначений також для організації самостійної роботи студентів, поглиблення та розширення їх теоретичних знань та формування практичних умінь з методики навчання математики в основній школі.

УДК 373.5.016:51(076)

ББК 74.262я73-5

ISBN 978-966-660-820-1

© Колектив авторів, 2012

© Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012

---

## ПЕРЕДМОВА

Пропонований навчальний посібник є продовженням “Практикуму з методики навчання математики. Загальна методика”, що був виданий за редакцією З. І. Слєпкань у 2006 році для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів.

Його структуру, ймовірно змістове наповнення, призначення, дидактичну доцільність запроєктувала професор З. І. Слєпкань. Ми продовжили розпочату роботу, підхопивши тим самим естафетну паличку з рук дорогого вчителя, який пішов у вічність, залишивши нам справу свого життя. Світла їй пам'ять.

Даний навчальний посібник охоплює теми з методики навчання математики в 5-6-х класах, систематичних курсів алгебри та геометрії в 7-9-х класах, тобто важливі теми методики навчання математики в основній школі.

Особливістю посібника є те, що він може бути використаний як для організації самостійної роботи студентів, так і для підготовки та проведення практичних занять з методики навчання математики. Зміст відповідає діючій програмі з методики навчання математики, узгоджується з лекційним курсом та практичними заняттями навчальної дисципліни “Методика навчання математики” в педагогічних університетах.

Працюючи за даним навчальним посібником студенти матимуть змогу: закріпити і поглибити свої теоретичні знання; сформувати вміння аналізувати діючі альтернативні підручники з математики для основної школи; розробляти уроки з математики різних типів; визначати мету вивчення навчального матеріалу на уроці, рівень вимог до математичної підготовки учнів; вчитися здійснювати контроль навчальних досягнень учнів і застосовувати під час навчання учнів математики нові інформаційні технології тощо. Дієвим засобом для формування у студентів професійних компетентностей виступають контрольні-смыслові та реконструктивно-творчі завдання, якими в достатній мірі наповнений пропонований посібник.

Одним з важливих завдань даного посібника є також підготовка студентів до навчальної і виробничих педагогічних практик.

---

Посібник підготували: В. Г. Бевз (Тема 3.1.), О. Є. Волянська (Теми: 3.2; 3.3; 3.5), В. Я. Забранський (Теми: 2.3; 2.4; 3.4; 3.10), В. М. Кліндухова (Тема 2.1); С. М. Лук'янова (Теми: 1.1; 1.2; 1.3; 2.2), О. І. Матяш (Теми: 3.6; 3.7), А. В. Прус (Теми: 3.8; 3.9) В. О. Швець (2.1; 3.8; 3.9; 3.6; 3.2). Загальну редакцію здійснив професор В. О. Швець.

Виражаємо глибоку вдячність професору О. І. Скафі, доцентам Л. В. Тополі та Л. Г. Філон за конструктивну критику і цінні проради під час підготовки рукопису до друку.

Зауваження, пропозиції просимо надсилати за адресою: 01601, м. Київ, вул. Прирогова, 9, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Кафедра математики і теорії та методики навчання математики.

*Автори*

---

## Тема 3.8. Координатний метод розв'язування планіметричних задач

**Мета:** Ознайомити із використанням методу координат для формування вмінь розв'язувати задачі курсу планіметрії. Розвивати логічне мислення та математичну інтуїцію. Виховувати алгоритмічну культуру.

### Питання до обговорення

1. У чому полягає суть методу координат?
2. У чому переваги методу координат перед синтетичним методом?
3. У чому, на вашу думку, полягають недоліки використання методу координат у школі для розв'язування планіметричних задач?
4. Фахівці яких галузей можуть використовувати у своїй професійній діяльності знання та вміння, які здобуті при вивченні методу координат у школі?
5. Зв'язки між якими шкільними предметами допомагає встановлювати метод координат?
6. У чому полягають такі міжпредметні зв'язки?
7. Які основні поняття, важливі для формування вміння застосовувати координатний метод, можна виокремити у темі “Декартові координати на площині”? Дайте означення кожного такого поняття теми за одним із чинних шкільних підручників.
8. Висловіть свої міркування з приводу вживання термінології та символіки, пов'язаної із методом координат у шкільних підручниках різних авторів.
9. Опишіть пропедевтичний етап формування понять теми “Декартові координати на площині”.
10. У чому відмінності між вивченням координат на площині в школі у 6-му та 9-му класах?
11. Які нові поняття, крім декартових координат, вводяться в темі “Декартові координати на площині” у 9-му класі?
12. Які основні навички та вміння, важливі для формування вміння застосовувати координатний метод, доцільно виокремити у темі “Декартові координати на площині”?
13. У який спосіб, переважно, відбувається формування цих навичок в учнів?

- 
14. Визначте мотиви вивчення нового навчального матеріалу теми “Декартові координати на площині”: координати середини відрізка.

### **Короткі теоретичні відомості**

**Метод координат** – це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла на площині (на прямій, у просторі) за допомогою чисел або інших символів.

**Цілі і навчальні задачі** вивчення координатного методу:

– показати, що координатний метод має свою мову, свої прийоми, дає можливість виражати властивості геометричних фігур аналітичною мовою в вигляді рівнянь і нерівностей і відповідно рівняння функції, нерівності перекладати на геометричну мову (графіків):

- сформувані понятійний апарат координатного методу;
- сформувані конкретні прийоми використання координатного методу при вивченні курсів алгебри і геометрії.

Координатний метод дозволяє розв’язувати геометричні задачі засобами алгебри, зводити побудови до обчислень. Координатне розв’язання дозволяє охопити всі можливі частинні випадки.

Використання координатного методу сприяє розвитку обчислювальних та графічних навичок, просторових уявлень, геометричної інтуїції учнів, оскільки його застосування пов’язане з вибором системи координат, обчисленням координат точок, із перекладом мови рівнянь на мову геометрії та навпаки. У свою чергу, координатний метод збагатив геометричною наочністю алгебру.

### **Понятійний апарат координатного методу**

**для прямокутної системи координат:**

- абсциса;
- ордината;
- координати (точки) – числа, які взяті в певному порядку і характеризують положення точки на прямій, на площині, в просторі;
- координатна пряма (в школі координатна пряма вводиться поступовим “присвоєнням” точкам прямої визначених чисел у зв’язку з розширенням числових множин і осмислення операції відкладання відрізків);
- координатна площина.

---

*В формуванні координатного методу в школі,  
можна виділити такі етапи:*

1. Засвоєння понятійного апарату. Здійснюється в основному в 5–6 класах і систематизується в курсі геометрії.

2. Введення на основі цього понятійного апарату рівнянь ліній і графіків функцій. Ці дві навчальні задачі розв'язуються в різних предметах (геометрії і алгебри), з різною змістовною ціллю, а тому учні часто не бачать між ними зв'язку, і не засвоюють головної суті методу.

3. Розкриття основних етапів застосування методу в курсі алгебри і геометрії.

4. Використання координатного методу для розв'язання різних математичних задач.

**Використання координатного методу розв'язування задач передбачає виконання таких кроків:**

- 1) переклад задачі на мову координат.
- 2) перетворення аналітичного виразу.
- 3) зворотній перехід, тобто переклад координатної мови на мову, в термінах якої сформульована задача.

Зауважимо, що використання координатного методу до розв'язування *алгебраїчних задач* не відноситься до кола питань, які розглядаються у даній темі, тому зосередимось на *планіметричних задачах*.

Спочатку зазначимо таке. Третю програмову тему “Декартові координати на площині” учні вивчають у 9-му класі. На вивчення теми відведено 10 годин. Зміст навчального матеріалу такий: прямокутна система координат на площині; координати середини відрізка; відстань між двома точками із заданими координатами; рівняння кола і прямої. У пояснювальній записці до програми записано, що під час доведення теорем поряд із основним апаратом доведення (ознаками рівності трикутників), використовують засоби алгебри, серед яких – координати.

У класах з поглибленим вивченням математики, на заняттях математичного гуртка у звичайних класах доцільно ознайомити учнів з методом координат розв'язування геометричних задач. На прикладах розв'язання принаймні двох задач варто виділити правило-орієнтир методу координат.



Для формування вміння здійснювати перший крок у використанні координатного методу (перекладати умову задачі на мову математики та навпаки) в якості довідника можна використати дані таблиці 1. Представлений у таблиці матеріал можна взяти за основу для виготовлення таблиць, кодопозитивів, слайдів, комп'ютерних навчальних програм і використовувати на різних етапах уроку.

Таблиця 1

**Основні відношення між фігурами на площині**

№	Мова геометрії	Мова координат
1.	Точки $A$ та $B$ лежать на площині	$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$
2.	Дано пряму $AB$	$AB: y = kx + b; ax + by + c = 0;$ $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
3.	Прямі $AB$ і $CD$ паралельні	$AB: y = k_1x + b_1$ $CD: y = k_2x + b_2$ $\rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$
4.	Прямі $AB$ і $CD$ перпендикулярні	$AB: y = k_1x + b_1$ $CD: y = k_2x + b_2$ $\rightarrow AB \perp CD \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$
5.	Точка $O$ ділить відрізок $AB$ навпіл	$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), O(x_0; y_0);$ $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$
6.	Точка $C$ ділить відрізок $AB$ у відношенні $\lambda = \frac{AC}{CB}$	$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_0; y_0);$ $x_0 = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}; y_0 = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}$
7.	Довжина відрізка $AB$ дорівнює $m$	$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2); m = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
8.	Відстань від точки $M$ до прямої $AB$ дорівнює $d$	$M(x_0; y_0), AB: ax + by + c = 0;$ $d = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$

---

Серед планіметричних задач, які доцільно розв'язувати координатним методом, виділимо задачі **двох видів**.

**1-й вид:** на обґрунтування залежностей між елементами фігур, особливо між довжинами цих елементів. Приклад такої задачі: “В трикутнику  $ABC$   $BD$  – медіана,  $AB=c$ ,  $AC=b$ ,  $BC=a$ . Довести, що  $BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ ”.

**2-й вид:** на знаходження множини точок, які задовольняють певним властивостям. Приклад такої задачі: “Зайти множину точок, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок є величина стала”.

У шкільному курсі геометрії обмежуються лише розглядом прямокутної системи координат, тому координатний метод у планіметрії особливо ефективний під час встановлення співвідношень між довжинами елементів трикутників і чотирикутників, діагоналі або сторони яких перпендикулярні.

Проаналізуємо розв'язання задач, які приведено вище. У процесі аналізу виокремимо вміння, які є компонентами вміння використовувати координатний метод для розв'язування задач.

**Задача 1.** В трикутнику  $ABC$   $BD$  – медіана,  $AB=c$ ,  $AC=b$ ,  $BC=a$ . Довести, що  $BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .

*Розв'язання*

1. Виберемо систему координат так, щоб точка  $A$  була початком координат,  $AC$  – віссю  $Ox$ . У вибраній системі координат точки  $A, C, D$  мають такі координати:  $A(0;0)$ ,  $D\left(\frac{b}{2};0\right)$ ,  $C(b;0)$ . Отже, для розв'язування задачі необхідно оволодіння *вмінням оптимального вибору системи координат*, в якій найбільш просто знаходяться координати даних точок. Останнє, у свою чергу, визначає *вміння обчислювати координати заданих точок*.

2. Позначимо координати точки  $B$  через  $x$ ,  $y$ :  $B(x;y)$ . Використаємо формулу для знаходження відстані між точками, які задані своїми координатами, отримаємо:  $x^2 + y^2 = c^2$ ,  $(x-b)^2 + y^2 = a^2$ . За

цією ж формулою,  $BD^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - xb + \frac{b^2}{4} + y^2$ . Використаємо попередні рівності, отримаємо:  $BD^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ . Отже, необхідно вміти знаходити відстань між двома точками, які задані своїми координатами, та вміти обчислювати координати точок, якщо відома відстань між ними.

**Задача 2.** Зайти множину точок, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок є величина стала.

*Розв'язання*

1. Позначимо дані точки через  $A, B$ . Виберемо систему координат так, щоб вісь  $Ox$  співпала з прямою  $AB$ , а початком координат була точка  $A$  (вміння оптимально обирати систему координат).

2. Покладемо  $AB = a$ , тоді у вибраній системі координат  $A(0;0)$ ,  $B(a;0)$  (вміння знаходити координати заданих точок).

3. Точка  $M(x,y)$  належить шуканій множині тоді і тільки тоді, коли  $AM^2 - MB^2 = b$ , де  $b$  – стала величина (вміння складати рівняння даної фігури).

4. Використаємо формулу відстані між двома точками, отримаємо:  $AM^2 = x^2 + y^2$ ,  $MB^2 = (x - a)^2 + y^2$ ,  $AM^2 - MB^2 = x^2 + y^2 - (x - a)^2 - y^2 = b$  (вміння обчислювати відстань між точками, які задані своїми координатами), звідки  $x = \frac{b + a^2}{2a}$ .

5. Рівняння  $x = \frac{b + a^2}{2a}$  – це рівняння прямої, що паралельна до осі

$Oy$ , і знаходиться від точки  $A$  на відстані  $d = \frac{|b + a^2|}{2a}$  (вміння “бачити” за рівнянням конкретний геометричний образ).

Таким чином, для розв'язування задач координатним методом важливо оволодіти вміннями:

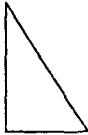
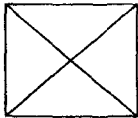


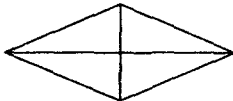
- 1) будувати точку за її координатами;
- 2) знаходити координати заданих точок;
- 3) обчислювати відстань між точками, які задані координатами;
- 4) обчислювати координати середини відрізка;

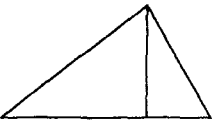
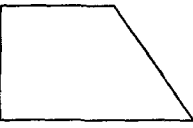
- 5) обирати оптимально систему координат;
- 6) складати рівняння фігури за її характеристичною властивістю;
- 7) бачити за рівнянням конкретний геометричний образ;
- 8) перетворювати алгебраїчні рівності.

Ефективним засобом формування вказаних вмінь є використання систем відповідних задач. Наведемо приклад системи задач, що сприяє формуванню окремих вмінь використовувати координатний метод (таблиця 2). Ці задачі можна подати для учнів через кодопозитиви, слайди або роздрукувати на окремих аркушах паперу.

Таблиця 2

**Система задач на формування вмінь вводити систему координат та знаходити координати заданих точок**

1.		Дано прямокутний трикутник з катетами $a, b$ . Виберіть систему координат так, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші вершини – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника та координати середин його сторін.
2.		Дано квадрат зі стороною $a$ . Виберіть систему координат: 1) щоб три вершини квадрата знаходились на осях координат; 2) щоб всі вершини квадрата знаходились на осях координат. Запишіть координати вершин квадрата і точки перетину його діагоналей.
3.		Дано прямокутник із сторонами $a, b$ . Виберіть систему координат так, щоб три його вершини знаходились на осях координат. Запишіть координати вершин трикутника і точки перетину його діагоналей.
4.		Дано рівнобедрений трикутник із основою $2a$ та висотою, проведеною на основу, $b$ . Виберіть систему координат так, щоб всі його вершини знаходились на осях координат. Запишіть координати вершин трикутника і середин його сторін.
5.		Дано ромб із діагоналями $2a$ та $2b$ . Виберіть систему координат так, щоб початок координат знаходився в точці перетину діагоналей, а всі вершини – на осях координат. Запишіть координати вершин ромба.

6.		<p>Дано трикутник із висотою <math>h</math> і проєкціями сторін, які прилягають до висоти, на третю сторону трикутника - <math>m</math> та <math>n</math>. Виберіть систему координат так, щоб всі три вершини трикутника знаходились на осях координат. Запишіть координати вершин трикутника і координати середин бічних сторін.</p>
7.		<p>Дано прямокутну трапецію з висотою <math>h</math> та основами <math>a, b</math> (<math>a &gt; b</math>). Виберіть систему координат так, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута трапеції і три її вершини знаходились на осях координат. Запишіть координати вершин трапеції і координати середин бічних сторін.</p>

Слід зазначити, що формування виділених вмінь – важливий етап вивчення методу. Проте важливим є оволодіння і загальними прийомами розв’язування задач.

**Проілюструємо розв’язання задачі координатним методом.**

**Задача.** Знайти множину точок, для кожної з яких відстані від двох даних точок рівні.

*Розв’язання*

*Перший етап.* Позначимо дані точки через  $A, B$ . Виберемо систему координат так, щоб вісь  $Ox$  співпадала з прямою  $AB$ , а початком координат була точка  $A$ . Нехай  $AB = a$ . Тоді у вибраній системі координат:  $A(0;0)$ ,  $B(a;0)$ . Точка  $M$  належить шуканій множині тоді і тільки тоді, коли  $AM = MB$ , або, що те ж саме,  $AM^2 = MB^2$ .

Використаємо формулу відстані між двома точками координатної площини  $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ , де  $x_1, y_1$  і  $x_2, y_2$  – координати даних точок. Отримаємо:  $AM^2 = x^2 + y^2$ ,  $MB^2 = (x - a)^2 + y^2$ . Тоді  $x^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2$ . Ця остання рівність є алгебраїчною моделлю ситуації, що дана в задачі. На цьому закінчується перший етап її розв’язування (переклад на координатну мову).

*Другий етап.* Виконаємо перетворення отриманого виразу  $x^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2$ , в результаті якого отримаємо співвідношення  $x = \frac{a}{2}$ .

*Третій етап.* Здійснимо переклад мови рівняння на геометричну мову. Отримане рівняння є рівнянням прямої, що паралельна осі  $Oy$  та

---

знаходиться від точки  $A$  на відстані  $d = \frac{a}{2}$ , тобто середнього перпендикуляра до відрізка  $AB$ .

### МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ

1. Розробіть систему питань до анкетування студентів вашого курсу (вчителів загальноосвітніх шкіл, учнів старшої школи) з приводу використання координатного методу для розв'язування планіметричних задач. Проведіть таке анкетування, обробіть дані та подайте їх у вигляді діаграм, зробіть необхідні методичні висновки.

2. Доберіть необхідний історичний матеріал, який стосується координат та назвіть прізвища вчених, завдяки яким ми користуємось ідеєю координат на площині.

3. Розкрийте за словником етимологію понять “координата”, “абсциса”, “ордината”.

4. Доберіть запитання для фронтального опитування учнів зі збереження у них знань стосовно координат на площині перед систематичним вивченням теми “Декартові координати на площині” в курсі планіметрії в 9-му класі.

5. Створіть опорний конспект до теми “Декартові координати на площині”.

6. Складіть таблицю-довідник для учнів, що буде містити систему формул, необхідних для розв'язування планіметричних задач методом координат.

7. Розробіть системи задач у таблицях, які формують вміння: а) будувати точку за її координатами; б) обчислювати відстань між точками, які задані координатами; в) обчислювати координати середини відрізка; г) складати рівняння фігури за її характеристичною властивістю; д) бачити за рівнянням конкретний геометричний образ; е) перетворювати алгебраїчні рівності. За зразок можна взяти задачі у таблицях, які розміщені у посібнику № 6 із переліку літератури.

8. Розробіть фрагмент уроку засвоєння нових знань із використанням доведення будь-якої теореми курсу планіметрії координатним методом.

9. Підготуйте комп'ютерну презентацію для демонстрації розв'язування декількох планіметричних задач одночасно аналітико-синтетичним методом та координатним методом.

10. Розробіть фрагмент уроку засвоєння навичок та вмінь розв'язувати планіметричні задачі координатним методом.

11. Сформулюйте геометричне твердження за мові координат: “Довести, що якщо через деяку точку  $M$  провести пряму, що перетинає коло в точках  $A, B$ , то добуток  $MA \cdot MB$  є сталим і не залежить від положення точки  $M$ ”.

12. Доведіть за допомогою методу координат таке твердження: “Якщо в трикутнику дві медіани рівні за довжиною, то трикутник рівнобедрений”.

13. Розв'яжіть задачу координатним методом: “Дано прямокутник  $ABCD$ . Знайти множину точок  $M$ , для яких  $MA + MC = MB + MD$ ”.

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке координатний метод розв'язування задач?
2. Які два види планіметричних задач доцільно розв'язувати координатним методом?
3. Які основні кроки здійснюють під час розв'язування планіметричних задач координатним методом?
4. Без яких основних понять теми “Декартові координати на площині” використання координатного методу розв'язування задач є неможливим?
5. Які вміння необхідні учням для використання методу координат?
6. Які основні співвідношення між фігурами на площині ви можете назвати двома мовами – мовою геометрії та мовою координат?

### ЛІТЕРАТУРА

1. Автономова Т. В. Основные понятия и методы школьного курса геометрии: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1988. – 127 с.
2. Габович И., Горништейн П. Вооружившись методом координат // Квант. – 1996. – № 3. – С. 60-69.
3. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. Метод координат. – М.: Наука, 1966. – 80 с.
4. Грохольська А. Декартові координати на площині та в просторі на кодопозитивах // Математика в школі. – 2006. – № 2. – С. 17-23.
5. Крайзман М. Л. Розв'язування геометричних задач методом координат: посібник для самоосвіти вчителів. – К.: Рад. школа, 1983. – 127с.
6. Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С. Учимся решать задачи по геометрии: учеб.-метод. пособие. – К.: “Магистр S”, 1996. – 256 с.

- 
7. *Понтрягин Л. С.* Метод координат. – М. : Наука, 1978. – 128 с.
  8. *Савин А.* Координаты // Квант. – 1977. – № 9. – С. 50-59.
  9. *Слепкань З. І.* Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К. : Зодіак - ЕКО, 2000. – С. 302-309.
  10. *Смогоржевський О. С.* Метод координат. – К. : Рад. школа, 1959. – 40 с.



---

## Тема 3.9. Векторний метод розв'язування планіметричних задач

**Мета:** Ознайомити із використанням векторного методу для формування вмінь розв'язувати задачі курсу планіметрії. Розвивати логічне мислення. Виховувати алгоритмічну культуру.

### Питання до обговорення

1. У чому полягає векторний метод розв'язування задач?
2. Визначте понятійний апарат векторного методу розв'язування задач.
3. Визначте мотиви вивчення в 9-му класі на уроках геометрії теми "Вектори на площині".
4. Які основні етапи формування векторного методу в учнів?
5. Що слід називати вектором?
6. Що називають: а) вільним вектором; б) зв'язаним вектором; в) ковзним вектором?
7. Які вектори використовують на уроках геометрії?
8. Які вектори використовують на уроках фізики?
9. Які нові для учнів поняття вводять у темі, присвяченій векторам на площині?
10. Які специфічні розумові дії входять до складу діяльності, спрямованої на використання векторного методу?
11. Які основні відношення між фігурами ви можете навести і мовою геометрії, і мовою векторів?
12. Як можна сформулювати правило орієнтир векторного методу доведення тверджень?
13. У який спосіб учням доцільно подати це правил-орієнтир?
14. Які відомі твердження з планіметрії варто запропонувати розв'язати учням векторним методом для формування навичок використання правила-орієнтира?
15. Для доведення яких геометричних тверджень зручно використовувати векторний метод?
16. Які планіметричні задачі доцільно розв'язувати векторним методом?
17. Який алгоритм векторного методу розв'язування метричних задач можна запропонувати учням?

## Короткі теоретичні відомості

Суть методу векторів полягає в тому, щоб певне геометричне розміщення точок, прямих і площин у просторі записати мовою векторів, точніше – у вигляді векторної рівності. І навпаки, мову векторних формул і рівностей наповнити геометричним змістом, тобто перевести ту чи іншу векторну рівність на мову геометрії, надати їй геометричного звучання.

### Цілі вивчення векторного методу:

- дати ефективний метод розв'язання різних геометричних задач і доведення теорем;
- показати широке застосування векторного апарату в інших областях знань: техніці, фізиці, хімії і ін.;
- показати використання векторного методу при розв'язуванні задач з метою формування в учнів уміння виконувати узагальнення і конкретизацію;
- формувати в учнів такі якості мислення, як гнучкість, цілеспрямованість, раціональність, критичність та ін.

За діючою програмою тему “Вектори на площині” учні вивчають у 9-му класі. На вивчення теми відведено 10 годин. Зміст навчального матеріалу такий: вектор, його модуль та напрям; рівність векторів; координати вектора; додавання і віднімання векторів; множення вектора на число; колінеарні вектори; скалярний добуток векторів. Вектори віднесені, як записано у пояснювальній записці до програми, до засобів, за допомогою яких доводяться математичні твердження.

У зв'язку зі зменшенням кількості годин на вивчення математики в школі, програма та автори чинних підручників з геометрії не ставлять за мету систематично використовувати векторний метод при доведенні теорем і розв'язуванні задач, а передбачають вивчати вектори із загальноосвітньою метою і послуговуватися ними лише для розв'язування найпростіших стандартних задач. Безперечно в спеціалізованих школах і класах із поглибленим вивченням математики, на факультативах векторний метод має широко застосовуватися.

Вектор – поняття математичне, що знаходить своє застосування в фізиці та в інших прикладних науках. В математиці розглядають вільні вектори (вектор не зв'язаний ні з якою прямою і ні з якою фіксованою точкою). Різні направлені відрізки, які мають однакову довжину і напрям, є зображенням одного й того ж вільного вектора. В різних

---

підручниках геометрії (діючих та тих, що використовувались раніше) є різні трактовки поняття вектора: вектор – паралельне перенесення (О. Н. Колмогоров), вектор – напрямлений відрізок (А. В. Погорелов, Л. С. Атанасян, Г. П. Бевз), вектор – множина однаково напрямлених відрізків однакової довжини (В. Г. Болтянський) і т.д. Що являється причиною для різних трактувань вектора? Яка із трактовок є найбільш допустима для шкільного курсу геометрії і чому?

Введення поняття вектор може бути здійснено в рамках конкретної інтерпретації векторного простору, а саме “вектор – напрямлений відрізок”. Така точка зору на вектор прийнята в усіх діючих підручниках геометрії середньої школи. В деяких підручниках по методиці викладання математики виділяються позитивні і негативні підходи до цього, але автори виходять при цьому із міркувань простоти, доступності, додатків, не залучаючи до обґрунтувань своїх тверджень серйозні теоретичні положення.

Отже, трактовка вектора як напрямленого відрізка, надає цим об'єктам і операціям над ними виразну наочність, це дійсно дуже важливо, так як в процесі формування поняття велику роль відіграє образний компонент в результаті чого бажані такі означення, які дозволяють уяві легко конструювати зразки означених об'єктів. Такий висновок погоджується з результатами психологічних досліджень: в згорнутому вигляді розпізнання може здійснюватися за зовнішніми ознаками об'єктів, а не за ознаками, за якими воно здійснювалось на рівні розгорнутого виконання дії (або за ознаками, які використані в означенні поняття).

Операції над векторами, які вивчаються в школі, такі: додавання векторів (віднімання), множення векторів на число, скалярний добуток векторів. Ці операції вводяться: 1) в геометричній формі; 2) в координатній формі.

Центральним в даній темі є поняття координат вектора. При доведенні теорем даної теми застосовуються як координатний, так і традиційно-синтетичні методи. Загальна ідея доведення векторних рівностей за допомогою координат така: для доведення векторної рівності досить встановити рівність відповідних координат векторів, записаних в обох його частинах.

## **Понятійний апарат векторного методу**

**Основні поняття:** вектор, початок вектора, кінець вектора, співнаправлені вектори, протилежно напрямлені вектори, абсолютна величина вектора (модуль вектора), рівні вектори, нульовий вектор, координати вектора, проекція вектора на вісь, колінеарні вектори, одиничний вектор, координатні вектори (орти), скалярний добуток векторів, кут між двома ненульовими векторами.

**Основні дії:** додавання векторів (правило трикутника або паралелограма), віднімання векторів, множення вектора на число; зображення вектора в вигляді суми, різниці двох векторів; в вигляді добутку вектора на число; заміна вектора йому рівним за допомогою паралельного перенесення; розкладання вектора по осях; перехід від співвідношення між векторами до співвідношення між довжинами і виконання оберненої дії; вираження довжини вектора через скалярний квадрат; вираження величини кута між векторами через скалярний добуток векторів і довжин цих векторів.

## **Основні етапи формування векторного методу в учнів**

**1. Підготовчий етап.** Його мета – оволодіння вказаними поняттями і основними діями.

**2. Мотиваційний етап.** Його завдання – показати необхідність оволодіння цим методом.

**3. Орієнтувальний етап.** Його мета – роз'яснення суті методу і виділити основні компоненти на прикладі розв'язаної цим методом задачі.

**4. Етап оволодіння компонентами метода.** Мета – використовуючи спеціально підібрані задачі, формувати окремі компоненти методу (спочатку задачі на формування одного компоненту, потім двох, трьох і т. п.).

**5. Етап формування методу в “цілому”.** Мета – визначення змісту вправ і їх розв'язання.

### **Основні компоненти векторного методу розв'язання задач:**

1) переклад умови задачі на мову векторів, в тому числі:

- введення в розгляд векторів,
- вибір системи координат (якщо це необхідно),
- вибір базисних векторів,
- розклад введених векторів по базисним;

2) складення системи векторних рівностей (або однієї рівності);

- 3) спрощення векторних рівностей;
- 4) заміна векторних рівностей алгебраїчними рівняннями і їх розв'язання;
- 5) пояснення геометричного смислу одержаного розв'язку цієї системи (або одного рівняння).

Для визначення змісту вправ, які формують вміння застосовувати вектори необхідно виділити дії, адекватні цій діяльності.

**Специфічні розумові дії, які входять до складу діяльності, спрямованій на використання векторного методу**

1. Перекладати геометричні терміни на мову векторів та навпаки (здійснювати перехід від співвідношення між фігурами до співвідношення між векторами та навпаки).
2. Виконувати операції над векторами (знаходити суму, різницю векторів, добуток вектора на число).
3. Представляти вектор у вигляді суми, різниці векторів.
4. Представляти вектор у вигляді добутку вектора на число.
5. Перетворювати векторні співвідношення.
6. Переходити від співвідношення між векторами до співвідношення між їх довжинами та навпаки.
7. Виразити довжину вектора через його скалярний квадрат.
8. Виразити величину кута між векторами через їх скалярний добуток.

З метою успішного засвоєння учнями такої розумової дії як переформулювання відношень між фігурами з геометричної мови та навпаки, доцільно запропонувати учням таблицю основних відношень обома мовами (таблиця 1).

Таблиця 1

**Основні відношення між фігурами на площині**

№	Мова геометрії	Мова векторів
1.	$AB \parallel CD$	$\overline{AB} = k \cdot \overline{CD}$
2.	$AB \perp CD$	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$

№	Мова геометрії	Мова векторів
3.	Три точки $A, B, C$ належать одній прямій $a$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\overline{AB} = k \cdot \overline{BC}</math>, або <math>\overline{AC} = k \cdot \overline{BC}</math>, або <math>\overline{AC} = k \cdot \overline{AB}</math>;</li> <li>• <math>\overline{OC} = p \cdot \overline{OA} + q \cdot \overline{OB}</math>, де <math>O</math> – довільна точка, <math>p + q = 1</math></li> </ul>
4.	$A = B$	$\overline{AB} = \vec{0}$ , або $\overline{OA} = \overline{OB}$
5.	Точка $C$ належить відрізку $AB$ , $AB : CB = m : n$	$\overline{AC} = \frac{m}{n} \overline{CB}$ <p style="text-align: right;">або</p> $\overline{OC} = \frac{n}{m+n} \cdot \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overline{OB}$ <p style="text-align: right;">для деякої точки <math>O</math></p>
6.	$m$ – довжина відрізка $AB$	$m^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$
7.	Обчислити величину кута	<p>1. Вибрати два неколінеарні базисні вектори, для яких відомі відношення довжин і кути між ними.</p> <p>2. Вибрати вектори, які задають шуканий кут і розкласти його за базисними векторами.</p> $\overline{a} \cdot \overline{b} =  \overline{a}  \cdot  \overline{b}  \cdot \cos(\widehat{a, b})$ <p>3. Обчислити <math>\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{ \overline{a}  \cdot  \overline{b} }</math>.</p>
8.	$M_1$ – середина відрізка $A_1B_1$ , $M_2$ – середина відрізка $A_2B_2$	$\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2})$
9.	$OABOC$ – паралелограм	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{OC}</math>;</li> <li>• <math>\overline{OA} = \overline{CB}</math>, або <math>\overline{OC} = \overline{AB}</math></li> </ul>

Векторний метод, як і будь-який інший, не є універсальним, хоча і дозволяє розв'язувати широкий круг геометричних задач.

*Геометричні задачі, які доцільно розв'язувати методом векторів:*

- 1) задачі на доведення паралельності прямих та відрізків;
- 2) задачі на доведення того факту, що деяка точка ділить відрізок в деякому відношенні;
- 3) задачі на доведення належності трьох точок одній прямій;
- 4) задачі на доведення перпендикулярності прямих та відрізків;
- 5) задачі на доведення залежностей між довжинами відрізків;
- 6) задачі на знаходження величини кута.

З векторним методом доведення геометричних тверджень і відповідним правилом-орієнтиром доцільно ознайомити учнів на прикладах двох тверджень, які учні вміють доводити і без застосування векторів.

Проілюструємо використання методу векторів для розв'язування планіметричної задачі. Для порівняння розв'яжемо задачу також без використання векторів (аналітико-синтетичним методом).

**Задача.** Довести, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам.

*Розв'язання*

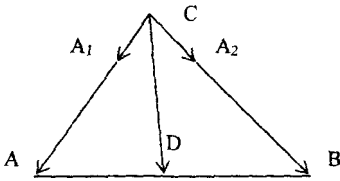


Рис. 1

**Векторний метод.** Нехай  $AD:DB = m:n$  (Рис. 1). Відкладемо на  $CA$  і  $CB$  вектори одиничної довжини:  $\overline{CA_1} = \vec{l}_1$  і  $\overline{CA_2} = \vec{l}_2$ . Виразимо вектор  $\overline{CD}$  двічі через вектори  $\overline{CA}$  і  $\overline{CB}$ :

$$\text{а) } \overline{CD} = \frac{m}{m+n} \overline{CB} + \frac{n}{m+n} \overline{CA} =$$

$$\frac{m}{m+n} \cdot a \cdot \vec{l}_2 + \frac{n}{m+n} \cdot b \cdot \vec{l}_1, \text{ де } a, b \text{ — довжини векторів } \overline{CA} \text{ і } \overline{CB};$$

$$\text{б) } \overline{CD} = x \cdot (\vec{l}_1 + \vec{l}_2) = x \cdot \vec{l}_1 + x \cdot \vec{l}_2.$$

$$\begin{cases} \frac{n \cdot b}{m+n} = x, \\ \frac{m \cdot a}{m+n} = x \end{cases}$$

Отже, запишемо систему рівнянь:  $\frac{n \cdot b}{m+n} = x$  і  $\frac{m \cdot a}{m+n} = x$ . Поділимо почленно ці

два рівняння системи, отримаємо:  $\frac{n \cdot b}{a \cdot m} = 1$ , тобто  $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$ . Або, остаточно:  $AD:DB = AC:BC$ .

**Аналітико-синтетичний метод.** Нехай  $BK$  — бісектриса внутрішнього кута трикутника  $ABC$  (Рис. 2). Доведемо, що  $AK:KC = AB:BC$ .

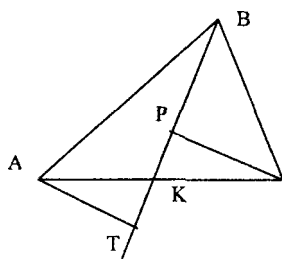


Рис. 2

1. Проведемо  $CP \perp BK$ ,  $AT \perp BK$ .
2.  $\triangle AKT \sim \triangle CPK$  (за двома кутами)  $\Rightarrow$   

$$\frac{AK}{KC} = \frac{TK}{PK} = \frac{AT}{PC}$$
3.  $\triangle AVT \sim \triangle CBP$  (за двома кутами)  $\Rightarrow$   

$$\frac{AV}{PC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BT}{BP}$$
4. Порівнюючи рівності, тримаємо:  
 $AK : KC = AB : BC$ .

## МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ

1. Розробіть систему питань до анкетування студентів вашого курсу (вчителів загальноосвітніх шкіл, учнів старшої школи) з приводу використання векторного методу для розв'язування планіметричних задач. Проведіть таке анкетування, обробіть дані та подайте їх у вигляді діаграм, зробіть необхідні методичні висновки.

2. Складіть історичну довідку про вектор, як одну із фундаментальних ідей сучасної математики, та векторний метод розв'язування задач.

3. Проаналізуйте різні трактування поняття вектора. Яку з них, на вашу думку, доцільно вважати найбільш придатною для використання в школі?

4. Охарактеризуйте систему викладу теорії векторів в шкільних підручниках із геометрії різних авторів.

5. Для векторного методу розв'язування задач важливо, щоб учні навчилися вільно шляхом відповідних побудов знаходити суму і різницю векторів. Розробіть фрагмент уроку формування в учнів відповідних вмінь.

6. Виконайте логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу, що стосується таких питань: 1) додавання векторів; 2) множення вектора на число.

7. Проаналізуйте етапи підготовки вчителя до вивчення теореми, що виражає ознаку колінеарності векторів.

8. Опишіть зміст структурної частини уроку геометрії (актуалізації опорних знань), що стосується теми "Скалярний добуток векторів".



9. Проаналізуйте векторне доведення теореми про перетин медіан трикутника.

10. Розробіть фрагмент уроку засвоєння нових знань із використанням доведення будь-якої теореми курсу планіметрії методом векторів.

11. Перекладіть геометричні твердження на мову векторів: а) довести, що середня лінія трапеції паралельна основам; б) довести, що медіани трикутника при перетині діляться у відношенні 2:1, рахуючи від вершини; в) довести, що діагоналі ромба перпендикулярні.

12. Розв'яжіть координатним методом задачі:

а) “На стороні  $AD$  і на діагоналі  $AC$  паралелограма  $ABCD$  вибрані точки  $M, N$ , так, що  $AM = \frac{1}{5}AD$ ,  $AN = \frac{1}{6}AC$ . В якому відношенні точка  $N$  ділить відрізок  $MB$ ?”

б) “В трикутнику  $ABC$  відомі довжини всіх його сторін. Визначте величини його кутів”.

13. Розробіть фрагмент уроку засвоєння навичок та вмінь розв'язувати планіметричні задачі векторним методом.

14. Складіть систему задач для формування специфічних розумових дій, які входять до складу діяльності, спрямованій на використання векторного методу.

15. Доберіть для самостійного розв'язування учнями шість геометричних задач, які доцільно розв'язувати методом координат. Підготуйте до кожної задачі карточку-консультант (або карточку допомоги), що стане в нагоді тим учням, які не зможуть без допомоги виконати розв'язання задачі.

16. Проаналізуйте декілька навчальних посібників із геометрії з точки зору врахування можливості формування вміння використовувати вектори для розв'язування метричних задач.

17. Проаналізуйте систему вправ до теми “Складання векторів” в одному із шкільних підручників геометрії. Виокремте вправи, за допомогою яких вводяться поняття, розкривається їх зміст, здійснюється їх закріплення.

18. Дослідіть питання про можливість використання під час розв'язування задач теми “Вектори на площині” таких розумових дій: аналогія, узагальнення, аналізу.

19. Доберіть завдання для самостійної роботи на засвоєння поняття “координати вектора”.

20. Підготуйте комп’ютерну презентацію для демонстрації розв’язування декількох планіметричних задач одночасно аналітико-синтетичним методом та методом векторів.

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. У чому полягає векторний метод розв’язування задач?
2. Які основні етапи формування векторного методу в учнів?
3. Які геометричні задачі доцільно розв’язувати методом векторів?
4. Які основні кроки під час розв’язування планіметричних задач методом векторів?
5. Які специфічні розумові дії входять до складу діяльності, спрямованій на використання векторного методу?

### ЛІТЕРАТУРА

1. *Бевз Г. П.* Обобщения при решении задач с помощью векторов // *Математика в школе.* – 1978. – № 2. – С. 47-50.
2. *Болтянский В. Г., Яглом И. М.* Векторы в курсе геометрии средней школы : пособие для учителей. – М. : Гос. уч.-пед. издательство МП РСФСР, 1962. – 96 с.
3. *Зив Б. Г., Мейлер В. М., Баханский А. Г.* Задачи по геометрии для 7-11 классов. – М. : Просвещение, 1991. – 171 с.
4. *Габович И. Г., Горништейн П. И.* Несколько задач, решаемых с помощью векторной алгебры // *Математика в школе.* – 1978. – № 4. – С. 67-69.
5. *Габович И. Г.* О задачах на разложение вектора по двум заданным неколлинеарным векторам // *Математика в школе.* – 1976. – № 2. – С. 36-38.
6. *Гусев В. А., Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л.* Векторы в школьном курсе геометрии : пособие для учителей. – М. : Просвещение, 1976. – 48 с.
7. *Гусев В. А., Хан Д. И.* Методика решения задач с помощью векторов // *Математика в школе.* – 1978. – № 3. – С. 26-30.
8. *Клопский В. М., Ягдовский М. И., Скопец З. А.* Применение векторной алгебры к решению планиметрических задач // *Математика в школе.* – 1976. – № 6. – С. 26-35.
9. *Корикова Т. М.* Некоторые независимые от размерности пространства геометрические задачи и их векторное решение // *Математика в школе.* – 1976. – № 3. – С. 69-70.
10. *Крайzman М. Л.* Розв’язування геометричних задач методом векторів : навчально-методичний посібник. – К. : Рад. школа, 1980. – 96 с.

- 
11. Кушниця И. А. Векторные методы решения задач. – К.: “Оберіг”, 1994. – 208 с.
  12. Майоров В. М., Скопец З. А. Векторные решения геометрических задач. – М.: Просвещение, 1968. – 250 с.
  13. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – С. 310-320.
  14. Хан Д. И. О решении геометрических задач с помощью векторов // Математика в школе. – 1974. – № 1. – С. 22-25.
  15. Математика. Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Сайт Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://www.mon.gov.ua/images/education/average/new\\_pr/math.doc](http://www.mon.gov.ua/images/education/average/new_pr/math.doc)

---

# З М І С Т

<b>ПЕРЕДМОВА</b> .....	<b>3</b>
------------------------	----------

## **МОДУЛЬ I**

### **МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В 5–6-Х КЛАСАХ**

<b>Тема 1.1.</b> Систематизація, узагальнення та розширення відомостей про натуральні числа.....	<b>5</b>
<b>Тема 1.2.</b> Методика вивчення звичайних і десяткових дробів.....	<b>25</b>
<b>Тема 1.3.</b> Методика вивчення раціональних чисел.....	<b>41</b>

## **МОДУЛЬ II**

### **МЕТОДИКА НАВЧАННЯ АЛГЕБРИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ**

<b>Тема 2.1.</b> Наближені обчислення в шкільному курсі математики.....	<b>61</b>
<b>Тема 2.2.</b> Методика вивчення тотожних перетворень виразів.....	<b>85</b>
<b>Тема 2.3.</b> Рівняння і нерівності та їх системи в курсі алгебри основної школи.....	<b>95</b>
<b>Тема 2.4.</b> Функції в курсі алгебри основної школи.....	<b>116</b>

## **МОДУЛЬ III**

### **МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ**

<b>Тема 3.1.</b> Про побудову шкільного курсу геометрії.....	<b>132</b>
<b>Тема 3.2.</b> Паралельні та перпендикулярні прями. Ознаки паралельності прямих.....	<b>151</b>
<b>Тема 3.3.</b> Трикутники.....	<b>162</b>
<b>Тема 3.4.</b> Геометричні побудови в курсі планіметрії.....	<b>173</b>
<b>Тема 3.5.</b> Чотирикутники, многокутники, вписані та описані многокутники.....	<b>193</b>
<b>Тема 3.6.</b> Рухи фігур на площині.....	<b>212</b>
<b>Тема 3.7.</b> Подібність фігур на площині.....	<b>222</b>
<b>Тема 3.8.</b> Координатний метод розв'язування планіметричних задач.....	<b>228</b>
<b>Тема 3.9.</b> Векторний метод розв'язування планіметричних задач.....	<b>239</b>
<b>Тема 3.10.</b> Геометричні величини в шкільному курсі планіметрії.....	<b>250</b>

*Навчальне видання*

**Валентина Григорівна Бевз, Олена Євгеніївна Волянська,  
Віталій Ярославович Забранський, Валентина Миколаївна Кліндухова,  
Світлана Михайлівна Лук'янова, Ольга Іванівна Матяш,  
Алла Володимирівна Прус, Василь Олександрович Швець**

## **ПРАКТИКУМ З МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ. ОСНОВНА ШКОЛА**

*Навчальний посібник для студентів  
математичних спеціальностей  
педагогічних університетів*

*Оригінал-макет – Т. М. Ветраченко*



Підписано до друку 27 квітня 2012 р.  
Формат 60х84/16 Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк офсетний.  
Умовн. друк. аркушів 16,69. Облік видав арк. 10,17.  
Наклад 500 прим. Зам № 519  
Віддруковано з оригіналів

---

**Видавництво** Національного педагогічного університету  
імені М. П. Драгоманова. 01030, м. Київ, вул. Пирогова, 9.  
Свідоцтво про реєстрацію № 1101 від 29.10.2002  
(044) 239-30-26