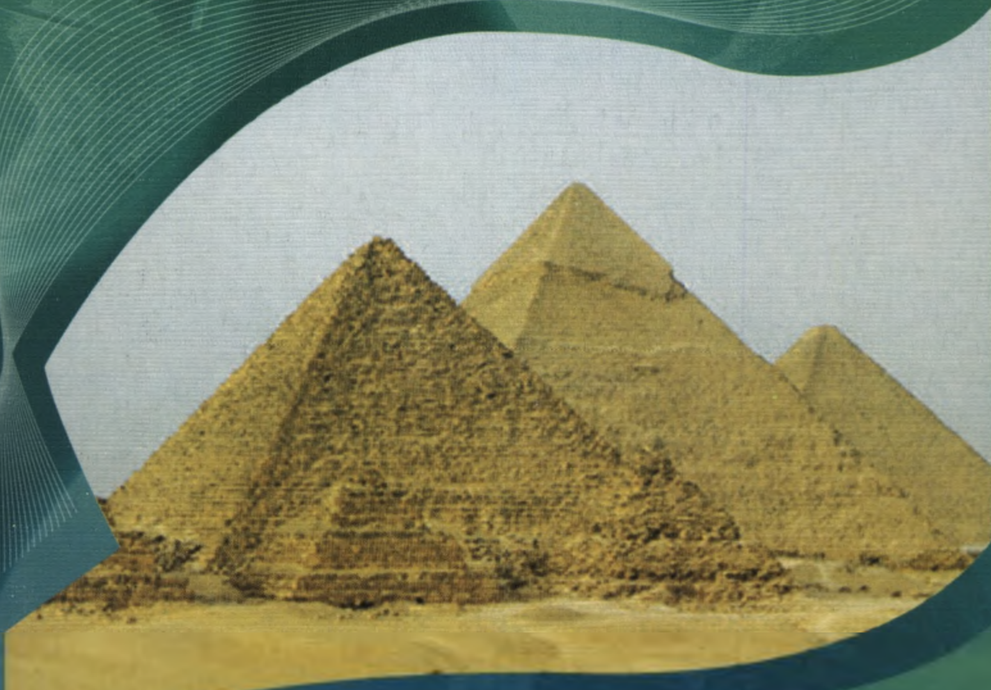
БІБЛІОТЕКА «ШКІЛЬНОГО СВІТУ»

ШКІЛЬНИЙ СВІТ

Алла Прус, Василь Швець

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ СТЕРЕОМЕТРІЇ

10—11 класи



Бібліотека «Шкільного світу»
Заснована у 2003 р.

Алла Прус
Василь Швець

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ СТЕРЕОМЕТРІЇ

10—11 класи

Математика. Бібліотека

Київ
«Шкільний світ»
2007

ББК 74.262.21
П85

*Рекомендовано Вченою радою НПУ імені М.П. Драгоманова,
протокол № 6 від 01.02.2007 р.*

Рецензенти:
Бурда М.І., доктор педагогічних наук, професор, Інститут педагогіки АПН України, м.Київ;
Дячук М.В., вчитель математики вищої категорії, спеціалізована школа № 20, м. Київ;
Ігнатенко М.Я., доктор педагогічних наук, професор, Кримський гуманітарний університет, м.Ялта.

Прус, Алла.
П85 Прикладна спрямованість стереометрії: 10—11 кл. / А. Прус, В. Швець. — К. : Шк. світ, 2007. — 128 с. — (Б-ка «Шк. світу»). — Бібліогр. : с. 124—127.
ISBN 978-966-451-000-1.
ISBN 978-966-451-089-6.

Посібник містить як теоретичні відомості, так і конкретні практичні матеріали, що дають можливість реалізувати прикладну спрямованість стереометрії в старшій школі з довільним профілем навчання.

Для вчителів математики та учнів, викладачів і студентів фізико-математичних факультетів, а також для тих, хто пише підручники з геометрії для старшої школи.

ББК 74.262.21+22.151.0

ISBN 978-966-451-000-1 (б-ка «Шк. світу»)
ISBN 978-966-451-089-6

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Національна доктрина розвитку освіти в Україні та концепція загальної середньої освіти (12-річна школа) спрямовують педагогічну науку на пошук нових принципів та критеріїв вибору змісту освіти, нових технологій, які ведуть до формування високого рівня практичних компетентностей учня, орієнтованих на розвиток його особистості.

Для того, щоб бути успішним у сучасному житті, кожен випускник середньої школи повинен оволодіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосування до розв'язування прикладних задач.

Шкільна геометрія – навчальна дисципліна, яка сприяє вирішенню завдання з формування особистості учня, його готовності до вибору майбутньої професії.

Відомо, що геометрія – наука абстрактна, яка за певних обставин викладається переважно відірвано від реалій матеріального світу, без належної реалізації її прикладної спрямованості. Це призводить до того, що значна частина учнів не відчуває потреби у вивченні даного предмета, оскільки не бачить можливості використання набутих геометричних знань у майбутньому. А тому є потреба у зв'язку шкільної геометрії з життям, на якій наголошувало багато вчених і вчителів-практиків. Зокрема, відомий математик, геометр О.Д.Александров вважав, що її слід вивчати, поєднуючи уяву з логікою, наочність зі строгими формулюваннями та доведеннями.

Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу геометрії і, зокрема, стереометрії, є метод математичного моделювання. Він має систематично застосовуватися під час засвоєння учнями геометричних понять і встановлення істотних зв'язків між ними, формування в них умінь читати готові рисунки та будувати зображення просторових фігур, виявлення та доведення властивостей (теорем) геометричних фігур, розв'язування прикладних задач та сприяти формуванню в школярів стійких мотивів навчання взагалі і навчання стереометрії зокрема.

Пропонований посібник якраз і спрямований на те, щоб допомогти вчителям математики, магістрам, науковцям, авторам підручників з геометрії з'ясувати теоретичні та практичні аспекти прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії. Автори пропонують власні методичні рекомендації та засоби, які сприяють успішному вивченню учнями курсу стереометрії незалежно від обраного ними профілю навчання.

Перелік використаних скорочень

ЗУН – знання, уміння, навички;
ЕО – емпірична основа;
ПЗ – прикладна задача;
ПММ – прикладання математичної моделі;
ПС – прикладна спрямованієть;
РДММ – результати дослідження математичної моделі;
СММ – створення математичної моделі;
НМТ – навчально-математична теорія.

2.5. ПРИЗМА

Цілі вивчення теми **«Призма»** повинні бути визначені на базі програми, але сформульовані з урахуванням інтересів і потреб конкретного класу.

Як відомо, систематизовані відомості про призму учні отримують у першій програмовій темі «Многогранники» в 11-му класі. В основній школі з поняттям призми учні ознайомилися у 6-му класі. А з деякими прикладами призм (кубом, паралелепіпедом) – у 5-му класі. Тому зміст ступеня ЕО та зокрема ступеня СММ можна розкрити у вигляді заздалегідь підготовлених доповідей. Це створює передумови для формування навичок самостійної роботи, що є обов'язковою частиною будь-якої професійної діяльності. Початок розповіді бажано провести у формі бесіди, під час якої зорієнтувати учнів щодо наступної навчальної діяльності. Змістове наповнення першого ступеня подамо у вигляді фрагментів розповіді вчителя учням про призму.

«Ви маєте певні знання про геометричні тіла, зокрема про опуклі та неопуклі многогранники, про їх грані, ребра, вершини, поверхню тощо. А тіла якої форми найпоширеніші в оточуючому нас середовищі? Назвіть їх».

Як правило, учні говоритимуть про поширеність форми прямокутного паралелепіпеда, куба. Серед прикладів – кришка столу, сірникова коробка, балки, будинки та кімнати, цеглина тощо.

«У стереометрії не звертають увагу на те, з чого виготовлені предмети, а лише на їх форму та розміри. У названих вами предметів схожі форми».

Звертаємо увагу учнів на те, що основи цих предметів – паралельні та рівні, а бічні грані – прямокутники (квадрати). Важливо оговорити те, як можна утворити таку форму: *паралельно переміщувати прямокутник (квадрат) уздовж певної лінії.*

Далі можна поставити запитання: «А якщо рухати не прямокутник, а, наприклад, трапецію, паралелограм або трикутник? Якою буде форма утвореного тіла? Назвіть предмети оточуючого середовища такої форми». Учні називатимуть олівець, залізничний насип, трикутні кутові шафи тощо.

Кожного разу слід акцентувати увагу на тому, яка саме плоска фігура рухалася та що спільного в утворених тілах: «Поверхня всіх тіл складається зі скінченної кількості многокутників, причому дві грані – рівні n-кутники, а решта n граней – паралелограми. Такі тіла називають *призмами.* У дослівному перекладі з грецької слово *призма* означає *обпилене тіло*».

Далі доцільно ще раз повторити означення призми та зосередитися на тому, чому тіла, що мають форму призми, виділили та вивчають окремо (зокрема тому, що такі тіла часто зустрічаються, а вивчення їх властивостей допоможе розв'язувати численні прикладні задачі). Це можна зробити, наприклад, у вигляді розповіді, що пропонуємо далі.

«Вивчення періодів людської культури далекого минулого, сліди якої навчилися розпізнавати археологи, переконує, що спочатку споруди були неправильних форм: в них позначилася звичка людини до використання природних укриттів – печер. Чому ж велика кількість будинків нині – це споруди, що мають форму прямокутних паралелепіпедів? *Прямокутна система побудови* архітектурної форми була обумовлена статичною основою споруд, будівельними матеріалами, головним чином деревом, і найпростішим, що легко піддається вимірюванням, «членуванням» площини та простору. Людина створила світ *прямокутних речей*, беручи у природи те, що може послугувати її потребам. Цей світ – результат діяльності людського розуму.

Велику Китайську стіну – фортечну стіну у Північному Китаї, було споруджено в IV–III ст. до н.е. для захисту від нападу кочових племен. Її довжина становить 5000 км, висота – в середньому 8 м, а ширина – 5 м.

Мінарет (від араб. *манара*, буквально – *маяк*) – це башта (кругла або квадратна в перерізі) для заклику мусульман на молитву. Розрізняють мінарети двох основних типів – чотиригранні (Північна Африка) або кругло ствольні (Близький і Середній Схід).

Наведемо кілька прикладів інструментів, що мають форму призми, уявлення про які ви, мабуть, маєте: *масштабна лінійка,* основна частина якої є чотирикутною призмою трапецієподібного перерізу; *напилок* – слюсарний інструмент, що служить для обпилювання металевих виробів і є чотирикутною призмою з ромбовидним перерізом; *гайка,* що має форму правильної шестикутної призми і яку використовують разом із *болтом* як кріпильну деталь для з'єднання двох (або більше) деталей; *болт* – круглий стрижень, на одному кінці якого є головка у вигляді правильної шестикутної призми; у деталях, які скріпляються болтом і гайкою, висвердлюють круглий отвір, у який вставляють болт, що загвинчують гайкою.

У спорті також не обходяться без знарядь у формі призми. Спортсмени стрибають у висоту *через дерев'яну планку* трикутного перерізу 3 см × 3 см × 3 см або через дюралеву трубку діаметром 23–26 мм, в обидва кінці якої вставляють дерев'яні буші трикутного або квадратного перерізу.

У фехтуванні використовуються три види холодної зброї: *рапіра* – колюча зброя, що має легкий еластичний клинок прямокутного перерізу, довжиною 90 см і масою 500 г; *шпага* – колюча зброя із жорстким тригранним клинком довжиною 90 см і масою 770 г; *шабля* – колюча та рубляча зброя, що має клинок довжиною 105 см фігурного перерізу з подовжніми пазами на бічній частині.

Для гри *в настільний теніс* виготовляють стіл висотою 0,76 м. Для кришки беруть фанеру або дошку товщиною 30 мм. Розмір кришки – $2,74\text{ м}\times 1,525\text{ м}$. М'ячик для гри в теніс виготовляють із целулоїду або пластика і він має масу 2,5 г.

Для природи, що оточує людину, прямокутна форма не є характерною і правильна форма окремих кристалічних утворень ніяк не спростовує це твердження. Кристали різних речовин відрізняються один від одного формами. Кубики кристалів кам'яної солі не сплутаєш із стовпчиками берилу або пластинками мідного купоросу. Форму шестигранних призм має кварц.

Як згадувалося, у природі дуже мало об'єктів, що мають форму призми. Цікавою є інформація про місцевість в Африці, яку називають Низький Велд. Особливість її ландшафту – численні невеликі пагорби. Це груди валунів майже кубічної форми, ніби покладених один на одного рукою людини. За схожість із старовинними баштами їх називають «замками» копі. Характерна прямокутна форма валунів пояснюється тим, що скріплювальний матеріал вивітрюється швидше, ніж тверда серцевина кожного блока.

Рослин, що мають форму призми, практично, не існує. Як ви думаєте, чому? (Учні відповідають.) Ми знайшли лише один приклад – рослину, що росте на болотах біля Нілу – папірус. Це сировина, з якої в давнину в Єгипті виготовляли папір. Папірус має жорсткі тригранні стебла висотою до 4,5 м.

І, звичайно, неможливо не згадати про *шестигранну форму* бджолиних стільників, що здавна привертала увагу не лише математиків. Нею цікавився філософ і фізик Аристотель (IV ст. до н.е.), природознавець Пліній Старший (І ст.), фізик Реомюр (XVIII ст.) і багато математиків: Папп (III ст.), Брожек (XVII ст.), Keніг, Маклорен, Люйллер (XVIII ст.), Лаланд, Браугхам (XIX ст.) та ін. Бджоли своєму житлу надавали таку форму, щоб при мінімальних витратах воску та часу будувати найпросторіші форми та максимально раціонально використовувати невеликий простір вулика. Уже Піфагор помітив, що існує лише три правильних многокутники, за допомогою яких можна без порожніх місць покрити всю площину навколо будь-якої точки: рівносторонній трикутник, квадрат і правильний шестикутник. Отже, лише одна з цих фігур може бути основою комірки – та, що має мінімальний периметр і одночасно максимальну площу поверхні. Таку властивість має правильний шестикутник. Звичайно, коло для заданої площі має ще менший периметр, але якби стільникові комірки мали форму циліндрів, то залишалося б багато невикористаної площі, що значно зменшило б загальний корисний об'єм вулика. Тому комірки повинні мати форму *правильної призми з шестикутною основою.* Якої форми повинна бути кришка (верхня основа) цих призм – плоска чи опукла? Досить складні обчислення показують, що плоска кришка медової комірки не була б найекономічнішою. Для цього потрібна кришка, що утворена трьома ромбами зі спільною вершиною.

Як бачимо, велика кількість предмётів навколо нас має форму призми».

Після опрацювання відповідного стереометричного матеріалу учні повинні спробувати застосувати отримані знання для розв'язування прикладних задач. Доцільно нагадати учням, що саме потреби практики, життя привели до створення та вивчення поняття призми, тому цілком логічно розв'язувати саме такі задачі.

Задачі, що подано далі, доцільно пропонувати на ступені **прикладання математичної моделі**. Проте цілком можливо використовувати окремі з них і під час вивчення третього ступеня.

ЗАДАЧІ, ПОВ'ЯЗАНІ З ПЛОЩЕЮ ПОВЕРХНІ ПРИЗМИ ТА ЇЇ ПЕРЕРІЗАМИ

5.1. Скільки граней у шестигранного олівця?

Відповідь. Якщо олівець не заточений, то 8. В іншому випадку – 7.

5.2. Будівельна цеглина важить 4 кг. Скільки важить іграшкова цеглинка з того самого матеріалу, всі розміри якої у 4 рази менші?

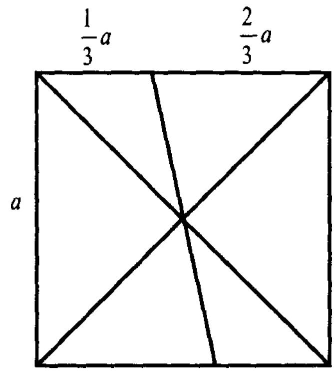
Відповідь. 62,5 г.

5.3. Чи можна загорнути одиничний кубик в квадратну серветку розмірами 3×3?

Відповідь. Так.

5.4. Господиня приготувала кекс, щоб разом зі своїми друзями поласувати ним під час подорожі. Вона хоче зазделегідь, ще вдома, розділити кекс, але не знає, скільки буде у неї супутників (2 або 3 особи). Яку найменшу кількість розрізів та як саме має зробити господиня, щоб усім вистачило порівну та не довелося додатково розрізати шматочки кексу? Кекс випікався у формі з квадратною основою.

Відповідь. Три розрізи.



5.5. 1) Коробка для упаковування подарунка має форму низької призми з ромбом в основі. Найбільша відстань між протилежними кутами кришки становить 24 см, а найменша – 10 см. Висота коробки 4 см. Скільки потрібно квадратних сантиметрів кольорового паперу, щоб обклеїти коробку (крім дна)?

2) Для обклеювання тільки збоку іншої, але такої самої за формою коробки, що має висоту 5 см і відстань між двома протилежними кутами 10 см, використали 260 $см^2$ паперу. Скільки необхідно паперу для обклеювання її кришки?

3) За умовою пункту 1 знайти периметр кришки та площу перегородки з картону, що проходить: усередині коробки через найближчі кути; усередині коробки через більш віддалені кути.

4) Скласти задачу, використовуючи дані попередніх пунктів.

Відповідь. 1) 328 $см^2$; 2) 120 $см^2$; 3) 96 $см^2$; 40 $см^2$.

5.6. Скільки треба заплатити за дерево для виготовлення шафи без ніжок висотою 2 м, шириною 1,5 м та глибиною 0,5 м, якщо 1 $м^2$ матеріалу коштує: для передньої частини – 50 грн, для бічних стінок – 38 грн, для задньої стінки – 30 грн, для дна, верха та чотирьох поличок – 26 грн. Для виготовлення шафи треба також придбати 4 зубчасті дерев'яні рейки загальною вартістю 108 грн.

Відповідь. 541 грн.

5.7. Скільки коштуватиме покриття спеціальним лаком шафи (з попередньої задачі), якщо її покривають лаком лише спереду та з боків, а покриття лаком 1 $м^2$ коштує 4 грн?

Відповідь. ≈ 20 грн.

5.8. Для виготовлення квадратного ящика висотою 80 см без кришки і дна використали дошку довжиною 6,4 см і шириною 4,3 см. Скільки таких дошок піде на виготовлення дна та кришки? На відходи додати площу половини однієї дошки. Як сформулювати дану задачу, використовуючи лише геометричні терміни?

Відповідь. ≈ 33 дошки.

5.9. Для відправлення товарів виготовлено 80 ящиків у формі куба з ребром 106 см. Скільки дошок пішло на виготовлення ящиків, якщо на 1 $м^2$ ящика потрібна 1 дошка? Дошка має довжину 50 см, а ширину 22 см.

Відповідь. ≈ 5392 дошки.

5.10. Прямокутну кімнату довжиною 5,6 м, шириною 3 м і висотою 2,5 м обклеєно шпалерами. У кімнаті є одне вікно шириною 2,3 м і висотою 1,3 м та двоє дверей шириною 1,1 м і висотою 2,1 м. Скільки використано рулонів шпалер, якщо довжина кожного рулону 10 м і ширина 53 см?

Відповідь. 7 рулонів.

5.11. Для обклеювання шпалерами стін кімнати використано 93,5 $м^2$ шпалер. Вікна та двері займають 15,1 $м^2$. Бордюр, яким обклеєно кімнату вздовж усіх стін, має довжину 25,5 м. Скільки коштуватиме фарбування підлоги цієї кімнати, якщо за фарбування масляною фарбою кожного квадратного метра беруть 3 грн і якщо висота кімнати менша від її ширини на 1,42 м?

Відповідь. 121 грн.

5.12. Потрібно побілити стелю та стіни у кімнаті, яка має розміри 7 м $\times$ $\times$ 3,5 м $\times$ 3 м. У кімнаті є двоє дверей висотою 2,7 м та шириною 1,1 м. Скільки коштуватиме робота, якщо побілка 1 $м^2$ коштує 4 грн?

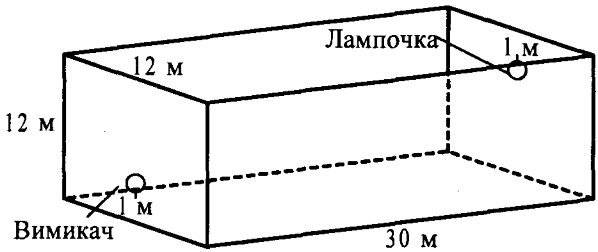
Відповідь. 330 грн.

5.13. Потрібно цементувати підвал глибиною 2 м, шириною 2,5 м та довжиною 4 м. Скільки пудів цементу для цього використають, якщо на кожний квадратний метр дна йде 2 пуди, а на квадратний метр стіни – 0,8 пуда цементу? Підвал має форму прямокутного паралелепіпеда. (1 т $\approx$ 61 пуд.)

Відповідь. $\approx$ 41 пуд.

5.14. Потрібно з'єднати стінною проводкою вимикач і лампочку у залі довжиною 30 м, а шириною і висотою по 12 м. Вимикач знаходиться посередині торцевої стіни на висоті 1 м від підлоги, а лампочка – посередині протилежної сторони на висоті 1 м від стелі. Якою найкоротшою може бути довжина проводки?

Вказівка. Розгляньте розгортку прямокутного паралелепіпеда.



Відповідь. 42 м.

5.15. Двосхилий дах має форму тригранної призми. Він розміщений на будинку довжиною 21 м і шириною 8,5 м. Висота даху (підйом) – 3,2 м. Скільки квадратних метрів займає поверхня даху?

Відповідь. ≈ 200 м^2 .

5.16. Прямокутну садибу довжиною 153 м і шириною 115 м обнесено парканом, що має висоту 213 см. За скільки часу 4 малярі зможуть пофарбувати з двох боків паркан, що має ворота і хвіртку, якщо 1 маляр фарбує за один день 40,9 м^2 паркану?

Відповідь. 14 днів.

5.17. Стайню довжиною 17 м, шириною 11 м, висотою від землі до даху 496 см зроблено з цегли. У стайні 2 дверей висотою по 284 см і шириною 195 см; 6 вікон шириною по 709 см і висотою по 355 см. Скільки використано цеглин на будівництво стін стайні, якщо на 1 м^2 стіни потрібно 198 цеглин?

Відповідь. ≈ 30 тис. цеглин.

ЗАДАЧІ, ПОВ'ЯЗАНІ З ОБЧИСЛЕННЯМ ОБ'ЄМУ ПРИЗМИ ТА ЇЇ КОМБІНАЦІЯМИ

5.18. У Скандинавії в 2005 році побудували хмарочос висотою 190 м. Він складений із 9 кубічних блоків, верхній з яких повернутий відносно нижнього на 90°. Який об'єм одного такого блоку?

Відповідь. ≈ 9300 м^3.

5.19. Стограмова плитка молочного шоколаду має розміри 16 см $\times$ 7,6 см $\times$ 0,6 см. Для того, щоб приготувати гарячий шоколад, можна до 60 г подрібненої шоколадної плитки додати півсклянки холодної води (125 см^3) і заварити. Потім додати 1 л молока, 3 столові ложки цукру (в одній столовій ложці приблизно 23 $см^3$ цукру) та кип'ятити кілька хвилин. Скільки отримаємо порцій гарячого шоколаду, якщо на одну порцію йде 200 мл?

Відповідь. ≈ 6 порцій.

5.20. Цукор-рафінад виготовляють у вигляді шматочків, що мають форму прямокутного паралелепіпеда розмірами 24 мм × 24 мм × 10 мм. Скільки шматочків цукру повинно міститися у пачці масою 0,5 кг? Питома вага цукру 1,2 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. ≈ 70 штук.

5.21. Коробка для цукерок має форму прямої призми, основою якої є ромб. Бічна поверхня коробки становить 900 $см^2$, діагональ дна дорівнює 40 см. Коло, що описує картинку на кришці та дотикається до сторін кришки, має довжину 75,36 см. Скільки кілограм цукерок може вмістити коробка, якщо 1 кг цукерок займає приблизно 2400 $см^3$?

Відповідь. 2,2 кг.

5.22. Майстер пофарбував підлогу у кімнаті. Чи можна обчислити приблизну товщину шару фарби?

Відповідь. Так, достатньо поділити об'єм витраченої фарби на площу пофарбованої поверхні.

5.23. Мило масою 410 г має об'єм 260 $см^3$. Яку масу має мило у формі прямокутного паралелепіпеда, якщо:

а) площа однієї бічної грані мила становить 96 $см^2$, площа перерізу, що проходить через діагоналі обох основ, – 120 $см^2$, а діагональ основи більша від сторони основи, через яку проходить дана бічна грань, на 2 см;

б) бічна поверхня мила більша від площі однієї з бічних граней на 910 $см^2$, довжина бічного ребра 20 см, а периметр основи 62 см?

Відповідь. а) ≈ 920 г; б) ≈ 7700 г.

5.24. Коробка для прального порошку має розміри 14 см × 3,5 см × × 19,5 см. Знайти об'єм прального порошку, що в ній міститься, якщо цей об'єм становить 80 % об'єму коробки.

Відповідь. ≈ 760 $см^3$.

5.25. Площа Світового океану наближено дорівнює 361 млн $км^2$, середня глибина – 3,8 км. Щоб уявити таку кількість води, потрібно вдатися до яких-небудь зрозумілих порівнянь. Подумки помістити Світовий океан у посудину кубічної форми та обчислити сторону такого куба.

Відповідь. ≈ 1100 км.

5.26. Скільки необхідно матеріалу, щоб виготовити тару для соку, яка має форму прямокутного паралелепіпеда висотою 20 см та довжиною сторін основи 6 см і 9 см? Яка місткість такої тари?

Відповідь. 708 $см^2$; 1080 $см^3$.

5.27. У ящик висотою 20 см і площею основи 720 $см^2$ потрібно запакувати морозиво. Скільки пачок морозива у формі прямокутного паралелепіпеда можна помістити у цю коробку, якщо розміри пачки морозива 4 см × 6 см × 10 см? Визначити вартість такого ящика з морозивом, якщо вартість однієї пачки становить 1,25 грн.

Відповідь. 60 штук; 75 грн.

5.28. Скільки приблизно цеглин потрібно для будівництва 18 стовпів висотою 4 м з перерізом у вигляді квадрата зі стороною 7 дм? Розмір цеглини 1 дм × 1,5 дм × 3 дм. Втрати становлять 5 %.

Відповідь. 8200 цеглин.

5.29. Необхідно, щоб у класі на кожного учня приходилося не менше 6 $м^3$ повітря. Клас має довжину 10 м, ширину 6 м та висоту 3,5 м. Скільки учнів може знаходитися в ньому без шкоди для здоров'я?

Відповідь. 35 учнів.

5.30. Ширина класу не повинна перевищувати 7,1 м, щоб віддалені від вікон парти були достатньо освітлені. Довжина класу не повинна перевищувати 9,9 м, щоб учні, які сидять на задніх партах, чітко розрізняли написане на дошці. На кожного учня повинно припадати не менше 6 $м^3$ повітря. Беручи до уваги, що повітря, яке знаходиться вище за 3,6 м від підлоги, не бере участь у переміщенні повітряних шарів, обчислити, яка найбільша кількість учнів може одночасно навчатися в цьому класі.

Відповідь. 42 учні.

5.31. Визначити масу повітря в кімнаті, що має форму куба, якщо прийняти масу 1 $м^3$ повітря рівною 1,25 кг і якщо:

а) площа підлоги цієї кімнати дорівнює 36 $м^2$;

б) відстань між двома протилежними кутами кімнати (верхнім та нижнім) становить 25,9 м.

Відповідь. а) ≈ 270 кг; б) ≈ 4200 кг.

5.32. Кубатура однієї кімнати будівлі дорівнює 120 $м^2$. Обчислити кубатуру іншої кімнати цієї будівлі, якщо її ширина в 1,5 раза більша від ширини першої, а довжина в 3 рази менша.

Відповідь. 60 $м^2$.

5.33. Для фундаменту кам'яної стіни, що оточує будинок (довжина будинку 383 м, ширина 250 м), потрібно викопати рів шириною 0,53 м і глибиною 36 см. За скільки годин можуть виконати цю роботу 7 землекопів, якщо 3 землекопи за 12 год можуть викопати 19 $м^3$ землі і якщо троє воріт мають довжину по 4,3 м?

Відповідь. 61 год.

5.34. Підлогу в прямокутному залі викладено мармуровими плитами. Кожна плита має форму правильної 8-кутної призми зі стороною основи 6,4 см і товщиною 2,5 см. Яка площа підлоги, якщо всі плити мають масу 89 690 кг? Густина мармуру $2{,}6 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{м^3}$.

Відповідь. 140 $м^2$.

5.35. Дерев'яну плитку у формі правильного восьмикутника зі стороною 3,2 см і товщиною 0,7 см зроблено з дерева, що має густину 0,5 $\frac{г}{см^3}$. Знайти масу дерев'яної плитки.

Відповідь. 3,5 г.

5.36. Визначити місткість трикутної шафки у ванній кімнаті, якщо її основою є рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 50 см, а площа більшої грані на 1700 $см^2$ більша, ніж площа бічної грані.

Відповідь. 100 000 $см^3$.

5.37. Стіни та дно прямокутного басейну викладено плитами. Довжина басейну 11 м, ширина 6,4 м, глибина 4,3 м. Яка маса всіх плит, якщо на 1 $м^2$ поверхні басейну витрачається 313 кг плит? Товщина плити 13 см, а 1 $м^3$ плити має масу 2 400 кг.

Відповідь. ≈ 70 т.

5.38. Дзвіниця має два поверхи у формі правильних 8-кутних призм. Сторона основи зовнішньої стіни нижнього поверху дорівнює 12,5 футів, а верхнього – 10 футів; висота нижнього поверху дорівнює 8 сажнів, а верхнього – 6 сажнів. У дзвіниці знаходяться: 2 дверей шириною по 8 футів і висотою по 13 футів; 4 вікна шириною по 5 футів, а висотою по 8 футів. Скільки потрібно заготовити кубічних метрів цегли для кладки стін, якщо на 1 квадратний сажень стіни йде 1225 цеглин без залому і якщо в 1 кубічному футі укладається 11 цеглин? На залом додати 5 % потрібної кількості цеглин. (1 метр = 3,28 фута = 0,47 сажня.)

Відповідь. 588 $м^3$.

5.39. Віконне скло важить 3,75 фунта, а 1 кубічний дюйм скла важить 10 золотників. Яку довжину має скло, якщо його ширина дорівнює 18 дюймів, а товщина дорівнює 1 лінії. (1 кг = 2,44 фунта, 1 г = 0,23 золотника, 1 лінія = 0,1 дюйма, 1 м = 39,4 дюйма.)

Відповідь. 50,6 см.

5.40. Будинок має довжину 11 м і ширину 8,5 м. На горизонтальному даху цього будинку лежить шар снігу товщиною 25,4 см. Яку масу витримує дах, якщо 1 $м^3$ снігу має масу 88 кг?

Відповідь. 2113 кг.

5.41. Конопляне масло, яке перелили в посудину кубічної форми глибиною 7,6 см, має масу 411 г. Яку масу має 16,4 $см^3$ масла?

Відповідь. 15 г.

5.42. У склянку, наповнену водою, що має форму правильної 8-кутної призми з ребром основи 2,5 см і висотою 12,7 см, опущено шматок міді. Після того, як мідь вийняли зі склянки, рівень води став 6,4 см. Скільки кубічних сантиметрів міді міститься в цьому шматку?

Відповідь. 200 $см^3$.

5.43. На фермі із запасу виноградного соку в 50 відер продано через їдальню 1000 склянок соку. Кожна склянка має форму правильної 6-кутної призми з ребром основи 3,2 см і висотою 10 см. Інший сік продали оптом через магазин. Скільки відер соку продано через магазин? Прийняти об'єм одного відра за 12 300 $см^3$.

Відповідь. 28 відер.

5.44. Під час зливи за 1 год випадає шар води висотою 37 мм. Визначити масу води, яка випала при такій зливі на прямокутний настіл довжиною 100 м та шириною 80 м, якщо злива тривала $1\frac{1}{4}$ год та 1 $м^3$ води має масу 1 т.

Відповідь. 370 т.

5.45. Лід тане тим повільніше, чим менша його поверхня дотику з повітрям. Привезено для льодового свята 59 $м^3$ льоду. Як його вигідніше скласти для того, щоб він танув якомога повільніше: у формі куба чи прямокутного паралелепіпеда з основою 6,3 м × 4,2 м?

Відповідь. У формі куба.

5.46. Один із самих великих метеоритів за формою нагадує прямокутний паралелепіпед, розміри якого такі: довжина 4 м, ширина 2,5 м, висота 2 м.

Його було знайдено в 1894 р. поблизу мису Йорк. Яку масу має такий метеорит, якщо 1 $см^3$ речовини метеориту має масу 4 г?

Відповідь. 80 т.

5.47. У мікроскоп угледіли крупинку повареної солі кубічної форми з довжиною ребра 0,01 мм. Скільки таких мікроскопічних крупинок у 410 г солі, якщо 1 $см^3$ повареної солі має масу 2 г?

Відповідь. $\approx$ 205 млрд.

5.48. На лісопильних заводах в 1 $м^3$ повітря буває до 0,017 г пилу. Скільки пилу (за масою) вдихає робітник на такому заводі протягом 8-годинного робочого дня? Скільки він вдихає за рік, якщо в році 300 робочих днів? Людина кожної хвилини вдихає приблизно 0,2 л повітря.

Відповідь. 0,029 г; 8,7 г.

5.49. На позолоту 1 $м^2$ куполу йде 1 г золота. Яка товщина шару позолоти, якщо 1 $см^3$ має масу 20 г?

Відповідь. 0,00005 мм.

5.50. Сніжинка у формі правильної шестикутної призми має діаметр основи 0,14 мм, висоту 0,34 мм (у середньому). Яку масу має мільйон таких сніжинок, якщо 1 $см^3$ льоду має масу 0,9 г?

Відповідь. 4 г.

5.51. Розміри цеглини 7 см $\times$ 14 см $\times$ 28 см. Скільки цеглин піде на спорудження стіни довжиною 8,4 м, висотою 5 м і товщиною 49 см?

Відповідь. 7500 цеглин.

5.52. Скільки брусків довжиною 1 м і шириною та товщиною по 0,5 м можна укласти в ящик довжиною 4 м, шириною 2 м та глибиною 2,5 м?

Відповідь. 80 брусків.

5.53. Чи можна ящик з кришкою з розмірами $20\times15\times14$ заповнити коробками розміром $3\times5\times10$ так, щоб у ящику не залишилося порожнин і з нього не виступали коробки?

Відповідь. Якщо подумки розділити даний ящик на два ящики з розмірами $20\times15\times9$ і $20\times15\times5$, то в кожному з них один вимір буде ділитися на 10, другий – на 5, третій – на 3. Тому обидва ящика, а отже, і даний, можна заповнити коробками.

5.54. Чи вистачить у вас сили підняти куб литого золота з ребром 18,8 см, якщо його густина $19{,}3\ \frac{г}{см^3}$.

Відповідь. Напевне ні, оскільки маса такого куба становить 128 кг.

5.55. Розрахувати масу повітря в кімнаті довжиною 11,5 м, шириною 7,8 м і висотою 3 м, якщо маса 1 $дм^3$ повітря дорівнює 1,3 г.

Відповідь. ≈ 350 кг.

5.56. Сосновий ящик, відкритий зверху, має довжину 150 см, ширину 60 см і висоту 85 см. Визначити його масу, якщо товщина стінок дорівнює 3 см. Густина сосни $0,5\ \frac{г}{см^3}$.

Відповідь. ≈ 64 кг.

5.57. Під час зрізування землі на один штик (глибина однієї лопати) знімається шар товщиною приблизно 25 см. З якої ділянки потрібно зняти землю на 1 штик, щоб зрізаною землею засипати рів об'ємом 100 $м^3$?

Відповідь. 400 $м^2$.

5.58. Пліт сколочено із 42 балок прямокутного перерізу, кожна з яких має довжину 10 м, ширину 20 см і товщину 15 см. Густина дерева $0,6\ \frac{г}{см^3}$.

а) Чи можна на цьому плоті переправити через річку вантажівку масою 5 т?

б) Чи зміниться вантажопідйомність плоту, якщо ширину кожної балки буде зменшено на n сантиметрів, а товщину одночасно збільшено на стільки само сантиметрів?

Відповідь. а) Так. б) Не зміниться при збільшенні на 5 см; якщо $n \in (0;\ 5)$, то збільшиться, а якщо $n \in (5;\ +\infty)$, то зменшиться.

5.59. Скільки тонн зерна вміщує склад прямокутної форми з розмірами 30 м $\times$ 5 м, якщо зерно насипано рівним шаром товщиною в 1 м, а густина насипу зерна $0,8\ \frac{г}{см^3}$?

Відповідь. 120 т.

5.60. На автомобілях певної вантажопідйомності необхідно перевести листове залізо, густина якого $8\ \frac{г}{см^3}$. Які потрібно провести вимірювання та обчислення, щоб правильно навантажити машини?

Відповідь. Довжину, ширину та товщину одного листа заліза.

5.61. Міркою для відпуску зернових відходів зі складу служать два прямокутні ящики з рівними основами. Місткість одного з них 50 кг. Визначити місткість другого, якщо його висота в півтора раза перевищує висоту першого.

Відповідь. 75 кг.

5.62. Переріз залізничного насипу має форму рівнобічної трапеції, висота якої дорівнює 3 м, а сторони основ відповідно 4 м та 8 м. Скільки необхідно землі на 1 км такого насипу?

Відповідь. 18 000 $м^3$.

5.63. Переріз каналу має форму трапеції. Ширина каналу на рівні води 12,5 м, а біля дна 8,5 м. Його глибина 3 м. Швидкість течії води в каналі 1,6 км/год. Яка кількість води (в кубічних метрах) протікає через переріз каналу за 1 с?

Відповідь. 14 $м^3$.

5.64. Переріз каналу – трапеція з основами 6 м та 14 м. Ділянка каналу між шлюзами довжиною 2 км вміщує $6 \cdot 10^4$ $м^3$ води. Визначити глибину каналу.

Відповідь. 3 м.

5.65. При кожному ударі серце людини виштовхує 175 $см^3$ крові. Серце робить 75 ударів за одну хвилину. Кубічну посудину яких розмірів потрібно було б мати, щоб вмістити кількість крові, яку перекачує серце за добу?

Розв'язання

Позначимо ребро шуканої посудини за x. Тоді маємо:

$$x^3 = 75 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 175,\ x = 260 \text{ (см)},$$

тобто ребро куба має дорівнювати 2,6 м.

Відповідь. 2,6 м.

5.66. Якщо всі кубічні міліметри, що містяться в 1 $м^3$, поставити один на одного, то якої висоти отримаємо стовп?

Відповідь. 1000 км.

5.67. (Жартівлива задача.) Кубічний ящик яких розмірів був би потрібен, щоб у нього могли сховатися всі люди, що живуть на Землі? Людей на Землі близько 6×10^9. Вважати, що 6 людей займають об'єм 1 $м^3$.

Зауваження. Об'єм людського тіла – близько 50 $дм^3$, тобто $\frac{1}{20}$ $м^3$. Але людські тіла, звичайно, не вкладаються щільно, тому слід відвести більше місця.

Відповідь. Ребро ящика не перевищило б 1 км.

5.68. (Жартівлива задача.) Якби все населення земної кулі раптом пірнуло б у Ладозьке озеро, то на скільки піднявся б у ньому рівень води?

Поверхня озера – 18 000 $км^2$. Людське тіло має об'єм, що в середньому дорівнює 50 $дм^3$.

Відповідь. Рівень води піднявся б на 2 см.

Учні, зазвичай, з інтересом розв'язують ПЗ, охоче коментують як саму умову, так і знайдену відповідь, висловлюють пропозиції щодо вдосконалення або створення іншої умови задачі. Тому можна і потрібно ***організувати роботу зі складання прикладних задач.*** Матеріал для цього можна знайти самостійно, а також використати той, що пропонуємо далі.

- Немало солі розчинено у Світовому океані. Спеціалісти підрахували, що коли б раптом випарувалася вода всіх морів та океанів, солі, накопиченої в осаді, було б достатньо для побудови уздовж екватора стіни товщиною 1 м і висотою 280 м.
- Площа Світового океану 361 млн км, середня його глибина 3,799 км. Океанолог М.Львович вважає, що об'єм океану дорівнює 1370 млн $км^3$.
- Американські економісти підрахували, що вартість усіх речовин, розчинених у 1 $км^3$ морської води, приблизно дорівнює 1 млрд доларів.
- Спеціалісти вважають, що в середньому під час зливи за одну добу випадає близько 20 млрд т води. У рекордних випадках під час тропічного циклону на кожну одиницю площі випадає за одну добу стовп води висотою 2500 мм, що в 4–5 раз більше від опадів за один рік у Москві.
- В атмосфері у вигляді пари знаходиться близько 13 тис. $км^3$ води. Загальна маса води, що випаровується в атмосферу, дорівнює приблизно 355 тис. $км^3$ у рік. Проте конденсується та повертається у Світовий океан лише 320 тис. $км^3$ води.
- Незважаючи на порівняно невелику концентрацію, загальна кількість солей у водах Світового океану обчислюється астрономічно великим числом, що дорівнює $4,8\cdot10^{16}$ т. Тому добування їх для побутових потреб не впливає на склад морської води. У цьому сенсі океан невичерпний.
- Морську воду слід вважати найкращим джерелом для отримання магнію, оскільки в кожному її кубічному метрі міститься 1,3 кг цього металу.
- Незважаючи на те, що в морській воді брому відносно мало – 65 г на 1 $м^3$, але з інших джерел цей елемент отримати не можна – він не зустрічається в жодному мінералі. Морська вода містить навіть золото – всього 0,00001 г на 1 $м^3$. Німецькі хіміки підрахували, що у Світовому океані розчинено біля 10 млн т золота. Проте вартість затрат на отримання

золота з морської води виявилася в багато разів більшою від вартості самого добутого золота. У кожній тонні морської води міститься 30 г вуглецю, 17 г азоту та 0,1 г фосфору.

- Якщо уявити, що під впливом певних причин раптом розтопиться лід Антарктиди, об'єм якого 25 млн $км^3$, то рівень океану підніметься на 40 м. На морському дні опиниться більшість великих міст світу, найгустонаселеніші частини материків, а також багато островів.

2.6. ПІРАМІДА

Дана НМТ (як і всі НМТ, які пов'язані із вивченням конкретних геоме ричних тіл) містить прикладний матеріал, багатий цікавими фактами. П дачу його можна здійснювати як у формі розповіді вчителя, так і бесіди учнями. У випадку бесіди доцільно матеріал розмежовувати запитанн ми як: «Що означає термін *піраміда*?»; «З чим асоціюється у вас пірам да?»; «Як часто можна спостерігати тіла пірамідальної форми у приро побуті, архітектурі тощо? Чим це зумовлено?».

Про походження терміна «піраміда»

За свідченням деяких дослідників, слово «піраміда» походить від єг петського «перемус», що означає діагональ основи. Форму правильн чотирикутних пірамід мають легендарні єгипетські піраміди, які видатн французький архітектор Ле Корбюзьє назвав «німим трактатом з геометрії З Єгипту, можливо, походить і сам термін «піраміда». За однією з гіпоте відповідне грецьке слово «пураміс» утворилося від давньоєгипетсько «перо», що означало «великий будинок» – саме так називали єгиптя усипальниці своїх фараонів. Інша гіпотеза виникла в середні віки. Середнь вічні вчені, услід за Платоном, пов'язували з пірамідою форму найактивн шої стихії – вогню. Вони вважали, що термін «пураміс» утворився від грец кого слова «пор», тобто «вогонь», і називали піраміду «вогненне тіло».

Слід зауважити, що у підручниках такої інформації мало. Підведен до створення та вивчення математичної моделі – **піраміди** – краще пр водити у вигляді розповіді вчителя з використанням заздалегідь підгот лених повідомлень учнів.

Учитель починає: «Де ми зустрічаємося з реальними прообраза геометричних пірамід? Дахи пірамідальної форми прикрашають різні кі ки, альтанки, «грибочки» на пляжі тощо. Намети (циркові, туристич часто мають форму піраміди. Форму правильної шестикутної пірамі (зокрема і зрізаної) мають бетонні стовпці, що є уздовж шляху в небез них для транспорту місцях – на поворотах з крутими схилами, побл

ЛІТЕРАТУРА

1. *Александров А.Д.* О геометрии // Математика в школе. – 1980. – №3.

2. *Алешина Т.Н.* и др. Учебные задания по математике для IX–X классов: Сборник задач с прикладным и практическим содержанием. – М.: Ротапринт НИИ школ МНО РСФСР, 1989.

3. *Астряб О.М., Хлєбніков К.О., Шингарьова Р.М.* Розв'язування стереометричних задач. – К.: Рад. шк., 1936.

4. *Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.* Геометрія. 10–11 класи: Пробний підручник. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003.

5. *Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.* Дидактичні матеріали з геометрії. 10–11 класи: Навчальний посібник. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003.

6. *Афонькин С.Ю., Афонькина Е.Ю.* Все об оригами. – СПб: ООО «Кристалл», 2004.

7. *Бевз Г.П.* Геометрія: Підруч. для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Г.П. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К.: Вежа, 2002.

8. *Бевз Г.П.* Геометрія в загальноосвітній школі // Математика в школах України. – 2003. – №1 (13).

9. *Бевз Г.П.* Геометрія в загальноосвітній школі (закінчення) // Математика в школах України. – 2003. – №2 (14).

10. *Бевз Г.П.* Прикладна спрямованість шкільного курсу геометрії: Посіб. для вчителя. – К.: Видавниче підприємство «Перше вересня», 1999. – 56с. – (Серія «Бібліотечка «Першого вересня»; липень 1999, № 25–28).

11. *Бекбоев И.* Задачи с практическим содержанием как средство раскрытия содержательно-прикладного значения математики в восьмилетней школе. – Фрунзе: МЕКТЕП, 1967.

12. *Богуславський І.П.* Збірник практичних задач і вправ з геометрії (для восьмирічної школи): Посібник для вчителів. – К.: Рад. шк., 1961.

13. *Бродський Я.С., Гречук В.Ю., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.* Стереометрія у старшій школі: Посібник для вчителя. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005.

14. Вивчення геометрії у загальноосвітній школі: Методичний лист / І.Ф.Тесленко. – К.: Рад. шк., 1984.

15. *Вітюк О.В.* Використання педагогічного програмного засобу GRAN-3D під час вивчення курсу стереометрії // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2001. – №3.

16. *Возняк Г.М., Маланюк К.П.* Прикладна спрямованість шкільного курсу математики: Розв'язування екстремальних задач: Метод. посібник. – К.: Рад. шк., 1984.

17. *Возняк Г.М., Маланюк М.П.* Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: Посібник для вчителя. – К.: Рад. шк., 1989.

18. Геометрія: Підруч. для учнів 10–11 кл. з поглиб. вивч. математики в серед. загальноосвіт. закладах / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, В.М. Владіміров, Н.Г. Владімірова. – К.: Освіта, 2000.

19. *Глейзер Г.Д.* Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии. – М.: Педагогика, 1978.

20. *Гнеденко Б.В.* Математика и математическое образование в современном мире. – М.: Просвещение, 1985.

21. *Гончаренко Б.Г.* Задачи и вопросы по стереометрии (для устного решения). Многогранники и тела вращения. – М.: Просвещение, 1964.

22. *Грицаенко Н.П.* Устные упражнения по математике для 8–10 классов: Пособие для учителя. – К.: Рад. шк., 1988.

23. *Гуткин Л.И.* Сборник задач по математике с практическим содержанием (для техникумов). – М.: Высш. шк., 1968.

24. *Далингер В.А.* Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1991.

25. *Дубинчук О.С., Нестеренко Т.Я., Тесленко И.Ф.* О преподавании математики в связи с трудовым и производственным обучением. – М.: Учпедгиз, 1962.

26. *Жалдак М.І.* Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997.

27. *Знаменский М.Е.* Геометрические фигуры в технических формах: Пособие для учителей средней школы. – М.: Гос. уч.-пед. изд-во МП РСФСР, 1960.

28. *Зыкова В.И.* Формирование практических умений на уроках геометрии / Под ред. К.А. Менчинской. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963.

29. *Карасев П.А.* Элементы геометрии, изучаемые на перегибании листка бумаги. – М.: Госиздат, 1923.

30. *Квасникова З.Я., Поспелов А.И., Ермолаева Е.Н., Калиткин Н.М.* Сборник задач по геометрии. – М.: Просвещение, 1964.

31. *Кисельов А.П.* Геометрія: В 2 ч.: Підручник для IX–X класів середньої школи. – К.: Рад. шк., 1957. – Ч.2.

32. *Клопський В.М., Скопець З.А, Ягодовський М.І.* Геометрія: Навчальний посібник для 9 і 10 класів середньої школи. – К.: Рад. шк., 1982.

33. *Колягин Ю.М., Пикан В.В.* О прикладной и практической направленности обучения математике // Математика в школе. – 1985. – №6.

34. *Конфорович А.Г.* Математика служит человеку. – К.: Рад. шк., 1984.

35. *Левитин К.Е.* Геометрическая рапсодия. – М.: ИД «Камерон», 2004.

36. *Лиман М.М.* Практические задачи по геометрии для 8-летней школы: Пособие для учителей. – М.: Гос. уч.-пед. издательство МП РСФСР, 1961.

37. *Лоповок Л.М.* Сборник задач по геометрии для 9 и 10 классов: Дидактические материалы / Под ред. И.Ф. Тесленко. – К.: Рад. шк., 1984.

38. *Мотова З.П.* Связь теории с практикой в преподавании геометрии. – Ростов-на-Дону: Ростовское книжн. изд-во, 1959.

39. *Мышкис А.Д., Шамсутдинов М.М.* К методике прикладной направленности обучения математике // Математика в школе. – 1988. – №2.

40. *Неплях М.С.* Збірник задач з геометрії на базі техніки: Посібник для вчителів: – К.: Рад. шк., 1965.

41. *Нестеренко Т.Я.* Методика вивчення стереометричного матеріалу у восьмирічній школі: Посібник для вчителів. – К.: Рад. шк., 1961.

42. *Остроградський М.В.* Підручник з елементарної геометрії. – Тернопіль: Підручники та посібники, 2001.

43. *Перельман Я.І.* Жива геометрія: Теорія і завдання. – Х.: «Униздат», 1930.

44. *Петров В.А.* Математические задачи из сельскохозяйственной практики: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1980.

45. *Пойя Д.* Как решать задачу. – Львов: «Квантор», 1991.

46. *Попов Г.Н.* Сборник исторических задач по элементарной математике. – М.: ОНТИ, 1938.

47. *Прочухаев В.Г.* Связь теории с практикой в преподавании математики: Пособие для учителей. – М.: Гос. уч.-пед. изд-во МП РСФСР, 1958.

48. *Раухман А.С., Сень Я.Г.* Устные упражнения по геометрии для 7–11 классов: Пособие для учителя. – К.: Рад. шк., 1989.

49. *Ревіс Л.З.* Збірник виробничих задач і вправ з елементарної математики. – Х.–К.: Держ. науково-технічне вид-во України, 1934.

50. *Салмина Н.Г.* Знак и символ в обучении. – М.: Изд-во МГУ, 1988.

51. *Сергеев Н.И., Олехник С.Н., Гашков С.Б.* Примени математику. – М.: Наука, 1989.

52. *Смирнов А.В.* Мир растений: Рассказы о саксауле, селитрянке, баобабе, березах, кактусах, капусте, банксиях, молочаях и многих других широко известных и редких цветковых растениях. – М.: Мол. гвардия, 1979.

53. *Стратилатов В.П.* Сборник задач по геометрии для 9–10 классов: Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1986.

54. *Тадеєв В.О.* Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники: Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. В.І.Михайловського. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003.

55. *Тарасов Л.В.* Геометрія навколишнього світу. – Суми: Універсальна книга, 2003 – (Освітня модель «Екологія та розвиток»), Ч.2.

56. *Терешин Н.А.* Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990.

57. *Тесленко І.Ф.* Питання методики геометрії (в IX–XI класах): Посібник для вчителів. – К.: Рад. шк., 1962.

58. *Фирсов В.В.* О прикладной ориентации курса математики // Углубленное изучение алгебры и начал анализа / Сост. С.И. Щварцбурд, О.А. Боковнев. – М.: Просвещение, 1972.

59. *Фридман Л.М.* Наглядность и моделирование в обучении. – М.: Знание, 1984.

60. *Фройденталь Г.* Математика как педагогическая задача: Книга для учителя: В 2 ч. / Под ред. Н.Я. Виленкина; сокр. пер. с нем. А.Я. Халамайзера. – М.: Просвещение, 1983. – Ч.2.

61. *Хаметова З.Я.* Об одном способе усиления прикладной направленности обучения // Эвристика и дидактика точных наук. Сборник науч. работ. – Донецк: ТЕАН, 1993. – Вып.1.

62. *Хогарт В.* Анализ красоты. – М.: Искусство, 1958.

63. *Шаррельман Г.* Творческая геометрия. – М.: «Работник просвещения», 1924.

64. *Шафрановский И.И.* Симметрия в природе. – Л.: Недра, 1985.

65. *Штейнгауз Г.* Сто задач: Пер. с пол. – 4-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

66. *Яглом И.М.* Математика и реальный мир. – М.: Знание, 1978.

67. *Якиманская И.С.* Знание и мышление школьника. – М.: Знание, 1985.

68. Richard Rhoad, George Milauskas, Robert Whipple. Geometry for Enjoyment and Challenge. – Evanston, Illinois, 1991.

69. Krzysztof Klaczkow, Marcin Kurczab, Elzbieta Swida. Matematyka dla licealistow. – Warszawa, 2001.