Житомирський державний університет
імені Івана Франка

Прус А.В.
Сверчевська І.А.

ВЧИМОСЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ. ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА У ТЕСТОВИХ ЗАВДАННЯХ.

Навчальний посібник

Видавництво ЖДУ імені Івана Франка
Житомир
2010

Рекомендовано кафедрою математики
протокол № 5 від 15.01.10

Прус А.В., Сверчевська І.А.

Вчимося розв'язувати задачі зі стереометрії. Геометричні тіла у тестових завданнях: Навчальний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 32 с.

Навчальний посібник зі стереометрії містить розв'язання окремих важливих задач, прикладних задач та добірку тестових завдань із вказівками щодо розв'язування найскладніших із них.

Для вчителів математики та старшокласників, викладачів і студентів фізико-математичних факультетів, а також для тих, хто пише підручники з геометрії для старшої школи.

ЗМІСТ

ВСТУП

Роль математики в житті людини і суспільства важко переоцінити. Поряд із звичними в минулому практичними застосуваннями математичних знань в людській діяльності: інженерних розрахунках, статистичних, економічних дослідженнях, будівництві, конструюванні, з'являються нові напрямки. Математичними методами тепер користуються в біології, медицині, лінгвістиці, історії, біоніці. Нові професії (дизайнер, модельєр) і старі (художник, архітектор) змушують по-новому звернутися до законів математики, розвитку просторової уяви та творчого мислення. Вагоме місце у формуванні людських якостей займає такий розділ математики як геометрія. Цей предмет природним чином пов'язує можливості гармонійного розвитку образного та логічного мислення учнів. А курс стереометрії в рамках дедуктивної структури оперує уявленнями візуального просторового характеру. Навколишній простір – тривимірний. Його об'єкти – геометричні фігури – і є предметом вивчення стереометрії. Повсякденне життя людини, побут, професійна діяльність і вся навколишня природа пов'язані з просторовими геометричними об'єктами: призмами, пірамідами, конусами, циліндрами, кулями, тощо. Тому потрібно розглядати процес навчання стереометрії як надбання учнями необхідних загальнолюдських знань і цінностей. В той же час, як показує досвід, саме цей розділ стереометрії викликає в учнів значні труднощі. Більшість учнів не можуть застосувати набуті знання та вміння під час розв'язування нових, нестандартних задач, роблять помилки в їх розв'язаннях. Аналіз робіт учнів під час зовнішнього незалежного оцінювання дає змогу підтвердити недостатній рівень оволодіння вмінням розв'язувати стереометричні задачі про геометричні тіла. Більше 60% учнів взагалі не приступають до виконання таких завдань, а значна частина тих, хто робить кроки до розв'язування, припускаються помилок: неправильно з'ясовують положення елементів геометричних фігур, їхні розміри; роблять неправильні зображення.

Геометрія виникла з практичних задач, її твердження виражають реальні факти і знаходять численні застосування. Часто виникає практична необхідність визначати поверхню, об'єм об'єктів природи, побуту, будівель, досліджувати їх взаємне розташування, визначати оптимальні виміри і т. п. Для реалізації прикладної спрямованості розділу стереометрії "Геометричні тіла" ми пропонуємо розв'язувати задачі, які показують реальну користь геометрії, це прикладні задачі. *Прикладними* називають задачі, які виникають за межами математики, але розв'язування яких вимагає застосування математичного апарату. Розв'язування прикладної задачі передбачає такі *етапи:* 1) формалізації (переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, на мову математики); 2) розв'язування математичної задачі всередині побудованої моделі; 3) інтерпретації (переклад розв'язку математичної задачі з мови математики на мову тієї галузі, де вона виникла). Ми вважаємо, що розв'язування з учнями прикладних задач значною мірою сприяє позитивній мотивації, дозволяє навчати математиці так, щоб показати притаманний їй "людський вимір", що особливо важливо для активізації навчальної діяльності.

1. Розв'язання деяких прикладних задач

Задача №1.1. Горщик для кімнатної рослини має форму зрізаного конуса. Дно горщика займає 113 см^2, висота дорівнює 20 см, а висота його стінки від одного краю до іншого – 20,5 см. Господині треба пересадити кімнатні рослини. Горщиків у неї 10, а коріння займає приблизно 40% об'єму. Скільки господині треба купити землі, якщо земля має бути пухкою та її густина $\approx 1{,}5$ г/см^3?

Попередній аналіз та формалізація задачі. Поведемо аналіз задачі у формі евристичної бесіди.

- Що означає вимога задачі «скільки господині треба купити землі»? (Вона означає, що потрібно визначити, яка буде маса землі, бо землю продають на кілограми).
- Що дано в задачі, якщо горщик для квітів ототожнити з геометричним тілом? (Зрізаний конус, його висота, площа меншої основи (бо горщик для квітів – це конус, що «стоїть» на меншій основі) та його твірна).
- Як пов'язані вимога задачі та умова? (Такого зв'язку у явному вигляді не дано).
- Отже, якщо потрібно знайти масу землі, а в умові дано її густину, то яку величину тоді можна визначити? (Об'єм землі!).
- Тоді до чого, по суті, «звелась» задача? (До відшукання об'єму горщика, тобто зрізаного конуса).

Аналіз задачі здійснено. Переходимо до формулювання математичної задачі: «У зрізаному конусі 40% об'єму не заповнено. Залишок об'єму займає речовина, густина якої 1,5 г/см^3. Знайти масу цієї речовини в 10 однакових зрізаних конусах, якщо висота конуса дорівнює 20 см, довжина твірної – 20,5см, площа меншої основи 113 г/см^3 ». Зауважимо, що умову задачі можна вважати формалізованою. Однак у формулюванні умови є слова «маса речовини», «густина». Ці поняття більше відносяться до таких наук як фізика, хімія, але залишити їх цілком допустимо. Водночас відкоригувати формулювання можна так:

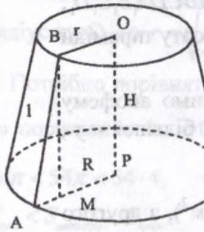

Рис. 1.1

«Дано зрізаний конус із висотою 20 см, площею меншої основи 113 $см^2$ та твірною 20,5 см. Знайти об'єм V_1, що становить 60% від об'єму даного конуса V. Обчислити величини m_1 та m_{10} за формулами: $m_1 = 1{,}5 \cdot V_1$; $m_{10} = 10m_1$».

Розв'язання задачі всередині побудованої моделі.

1. Див. рис. 1.1. Позначимо висоту конуса $OP = H$ =20 см, твірну $AB = l$ =20,5 см, радіус меншої основи $BO = r$, радіус більшої основи $AP = R$. Опустимо з точки B перпендикуляр $BM = H$ на більшу основу конуса.

2. Знайдемо радіус меншої основи: $r = \sqrt{\dfrac{113}{\pi}} \approx 6$ см.

3. За теоремо Піфагора з трикутника ABM визначимо $AM = \sqrt{20{,}5^2 - 20^2} = 4{,}5$ см.

4. Знайдемо радіус більшої основи зрізаного конуса: $R = 4{,}5 + 6 = 10{,}5$ см.

5. Знайдемо об'єм зрізаного конуса: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20 \cdot \left(10{,}5^2 + 10{,}5 \cdot 6 + 6^2\right) \approx 4380$ см^3.

6. Знайдемо об'єм, який займає речовина: $V_1 = \dfrac{4380 \cdot 60}{100} = 2628$ см^3.

7. Обчислимо $m_1 = 1{,}5 \cdot 2628 = 3942$ г.

8. Обчислимо $m_{10} = 10 \cdot 3942 = 39\,420$ г ≈ 39 кг.

Відповідь. 39кг.

Інтерпретація отриманого результату. Господині треба купити 39 кг землі.

Задача №1.2. Раніше, а подекуди і зараз, для виготовлення сирної паски використовували форму у вигляді правильної 4-кутної зрізаної піраміди.

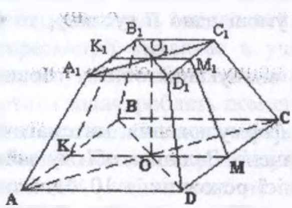

Рис. 1.2

Вона складається із 4-х бічних дощечок, з'єднаних крючками, дна (меншої основи) і дощечки (вона складає більшу основу) для підкладання її під вагу, якою надавлюють на сир. Визначити висоту форми, якщо площа бічних дощечок складає 1700см^2; площа всіх дощечок 2376см^2, а висота бічної дощечки - 25см.

Формалізація задачі. Дано правильну зрізану чотирикутну піраміду. Площа її бічної поверхні 1700м^2, повної – 2376м^2. Апофема дорівнює 25см. Знайти висоту піраміди.

Короткий запис. Дано (рис 1.2): правильна 4-кутна піраміда $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $S_{бічна} = 1700 см^2$; $S_{повна} = 2376 см^2$; апофема $MM_1 = 25 см$. Знайти висоту піраміди OO_1.

Розв'язання задачі всередині побудованої моделі. 1. Позначимо апофему $MM_1 - h$, висоту піраміди $OO_1 - H$, сторону меншої основи - x, більшої - y, тоді $x^2 + y^2 = 2376 - 1700 = 676$ (см^2).

2. Площа бічної грані (рівнобедреної трапеції) $S_{DD_1C_1C} = \dfrac{x+y}{2} \cdot 25$ (см^2), з другого боку $S_{DD_1CC_1} = S_{бічна} + 4 = 1700 + 4 = 425$ (см^2); звідки $\dfrac{x+y}{2} \cdot 25 = 425$, $x + y = 34$.

3. Розв'яжемо отриману систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 676 \\ x + y = 34 \end{cases}$ та отримаємо $x = 10(\text{см})$, $y = 24(\text{см})$.

4. Розглянемо переріз призми площиною, що проходить через середини протилежних сторін основи – рівнобедрену трапецію KK_1M_1M; її основи дорівнюють 10см та 24см, бічна сторона – 25см, а її висота буде одночасно дорівнювати і висоті піраміди H; отже, $H = \sqrt{25^2 - \left(\frac{24-10}{2}\right)^2} = 24\,(\text{см})$.

Відповідь 24 см.

Інтерпретація отриманого результату. Висота форми для сирної паски дорівнює 24см.

Задача №1.3. Сировари вважають, що при рівному об'ємі сири кульової форми краще зберігають свої смакові якості, ніж сири форм циліндра або куба. Чому?

Попередній аналіз та формалізація задачі. Спочатку смакові якості сиру не залежать від його форми. Існує гіпотеза, що смакові якості змінюються у результаті випаровування та окислення. А інтенсивність цих процесів залежить від площі поверхні тіла: чим вона менша, тим повільніше випаровування та окислення. Отже, щоб відповісти на запитання задачі, слід порівняти площі поверхонь куба, циліндра і кулі, які мають рівні об'єми.

Розв'язання задачі всередині побудованої моделі. 1. Задача залишається недостатньо визначеною, тому що невідома висота циліндра. Будемо вважати її рівною 2R, де R - радіус основи циліндра. Тоді його об'єм буде: $V = V_{цил} = 2\pi R^3$, звідки $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. $S_{пов.цил.} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 6\pi R^2 = 6\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}$. Але $V = V_{куба} = a^3$ (a – сторона куба), звідки $a = \sqrt[3]{V}$, $S_{куба} = 6a^2 = 6\sqrt[3]{V^2}$. Оскільки $V = V_{кулі} = \frac{4}{3}\pi r^3$ (де r – радіус кулі), то $r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$, тобто $S_{кулі} = 4\pi R^2 = 4\pi \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}$.

2. Потрібно порівняти площі поверхонь. Всі вони додатні, тому можна перейти до порівняння їх кубів: $S^3_{циліндра} = 6^3 \pi^3 \frac{V^2}{4\pi^2} = 54\pi V^2$, $S^3_{куба} = 54 \cdot 4V^2$, $S^3_{кулі} = 36\pi V^2$; $36\pi < 54\pi < 54 \cdot 4$, тобто маємо наступне: $S^3_{кулі} < S^3_{циліндра} < S^3_{куба}$, звідки $S_{кулі} < S_{циліндра} < S_{куба}$.

Відповідь. Найменша площа поверхні у кулі.

Інтерпретація отриманого результату. Сири кульової форми краще зберігають свої смакові якості.