Житомирський державний університет
імені Івана Франка

Прус А.В.

# МОДУЛЬ У РІВНЯННЯХ ТА НЕРІВНОСТЯХ

**Навчально-методичний посібник**

Видавництво ЖДУ імені Івана Франка
Житомир
2010

*Рекомендовано кафедрою математики*
*протокол №5 від 15.01.10*

**Прус А.В.**
Модуль у рівняннях та нерівностях: Навчально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 32 с.

Навчально-методичний посібник з алгебри містить відомості про модуль та його властивості, способи розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем із модулями. До кожного виду рівнянь, нерівностей з модулями наведені приклади із детальним їх розв'язанням, а також завдання для самостійного опрацювання із відповідями.

Для викладачів і студентів фізико-математичних факультетів, вчителів математики та учнів основної та старшої школи.

# ЗМІСТ

# МОДУЛЬ У РІВНЯННЯХ ТА НЕРІВНОСТЯХ

## 1. ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ МОДУЛЯ

***Модулем** додатного числа і нуля називають саме це число, а модулем від'ємного числа – число, йому протилежне, тобто, якщо a – дійсне число, то*
$|a| = \left[\begin{array}{l} a, \quad якщо\ a \ge 0 \\ -a, \ якщо\ a < 0 \end{array}\right.$. Модуль числа інакше називають абсолютною величиною числа. Модуль числа *a позначають* символом $|a|$. Отже, за означенням модуля, $|-5| = 5, |10| = 10, |0| = 0$.

Для розв'язування рівнянь та нерівностей, які містять модуль, необхідно вміти виконувати операцію розкриття модуля за означенням. Наприклад, запишіть вираз без знака модуля тобто, розкрийте модуль у таких вправах: **№1**. $|x-2|$. **№2.** $3|x+2|$. **№3.** $|x^2-x|$. **№4.** $|x+2|-x$.

*Розв'язання.* **№1**. $|x-2|$; тут під $|a|$ мають на увазі $|x-2|$, тоді за означенням модуля: $|x-2| = \left[\begin{array}{l} x-2, \quad якщо\ x-2 \ge 0 \\ -(x-2)\ якщо\ x-2 < 0 \end{array}\right.$ або $|x-2| = \left[\begin{array}{l} x-2, \quad якщо\ x \ge 2 \\ -x+2\ \ якщо\ x < 2 \end{array}\right.$

**№2**. $3|x+2|$; тут під $|a|$ мають на увазі $|x+2|$, тоді за означенням модуля:

$$3|x+2| = \left[\begin{array}{ll} 3(x+2), & якщо\ x+2 \ge 0 \\ 3(-1)(x+2), & якщо\ x+2 < 0 \end{array}\right. \quad або\ 3|x+2| = \left[\begin{array}{ll} 3x+6, & якщо\ x \ge -2 \\ -3x-6, & якщо\ x < -2 \end{array}\right.$$

**№3.** $|x^2-x|$; під $|a|$ мають на увазі $|x^2-x|$, тоді за означенням модуля буде:

$$|x^2-x| = \left[\begin{array}{ll} x^2-x, & якщо\ x^2-x \ge 0 \\ -(x^2-x), & якщо\ x^2-x < 0 \end{array}\right.$$

або

$$|x^2-x| = \left[\begin{array}{ll} x^2-x, & якщо\ x \in (-\infty;0] \cup [1;+\infty) \\ -(x^2-x) & якщо\ x \in (0;1) \end{array}\right.$$

**№4.** $|x+2|-x$; під $|a|$ мають на увазі $|x+2|$, вираз *(-x)* від модуля не залежить; використовуємо означення модуля:

$$|x+2|-x = \left[\begin{array}{ll} x+2-x, & якщо\ x+2 \ge 0 \\ -(x+2)-x, & якщо\ x+2 < 0 \end{array}\right. \quad або\ |x+2|-x = \left[\begin{array}{ll} 2, & якщо\ x \ge -2 \\ -2x-2, & якщо\ x < -2 \end{array}\right.$$

### Завдання для самостійної роботи

*Запишіть вираз без знака абсолютної величини*

1) $|x+2|+x$;
2) $-3|x-4|-x$;
3) $|6-x|$;
4) $|6-2x|$;
5) $|3x-2|+x+2$;
6) $-2|4-x|+4-x$;
7) $3|x|-2$;
8) $|x-|x||$;
9) $|2^3-3^2|$;
10) $|3-\sqrt{10}|$;
11) $|\pi^2-10|$;

## *Властивості модуля*

1. $|a| \ge 0$ для $a \in R$ (слідує із означення модуля).
2. Модулі протилежних чисел рівні: $|a| = |-a|$.
3. Модуль добутку дорівнює добутку модулів: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
4. Модуль частки дорівнює частці модулів: $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \ne 0$.
5. $|a + b| \le |a| + |b|$.
6. $|a - b| \ge |a| - |b|$.
7. $|a|^2 = a^2$.

***Геометричний зміст модуля*** числа є очевидним: довільне дійсне число являється координатою деякої точки на координатній прямій; тому щоб знайти модуль числа, треба виміряти в одиничних відрізках відстань від початку відліку до точки, що відповідає цьому числу. Модуль числа позначається так, як і довжина відрізка, т.т. модуль числа є ніщо інше, як довжина відповідного відрізка.

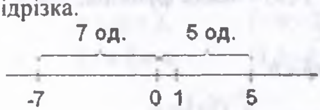

Рис. 1

$|5| = 5$, $|-7| = 7$ $|a|$– це відстань на числовій прямій від точки $a$ до 0 (рис. 1); $|a-b|$– це відстань між точками $a$ і $b$ числової прямої. Знаючи, що модуль позначає відстань, легко навчитись розв'язувати найпростіші рівняння та нерівності з модулем.

1. Оскільки множина точок числової прямої, для яких $|x| = d\ (d > 0)$, складається із двох точок $x_1 = d$ та $x_2 = -d$ (рис. 2), то рівняння $|x| = d\ (d > 0)$ має два розв'язки $x_1 = d$, $x_2 = -d$.

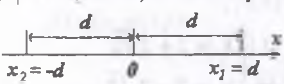

Рис. 2

Наприклад: $|x| = 2; \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array}\right.$; $|x| = 3; \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{array}\right.$.

2. Множину розв'язків нерівності $|x| < d\ (d > 0)$ можна трактувати як множину точок числової прямої, що розміщені від початку відліку на відстань меншу, ніж на *d* тобто, що лежать між точками *M(d)* і *M(-d)*. Отже, множина розв'язків нерівності $|x| < d\ (d > 0)$ є проміжок $-d<x<d$ (рис. 3(а)), а множиною розв'язків нерівності $|x| > d$ (d>0) є об'єднання двох проміжків $(-\infty;-d) \cup (d;+\infty)$ (рис. 3(б)).

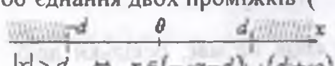

Рис. 3(а)

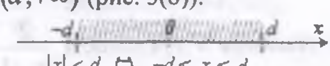

Рис. 3(б)

*Наприклад*: $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, тобто $x \in (-1;1)$;

$|x| > 4\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -4\frac{1}{2}\right) \cup \left(4\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Зазначимо, що геометричною інтерпретацією модуля, як правило, користуються у найпростіших випадках розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем.

**Завдання для самостійної роботи.**

1. Покажіть на числовій прямій множину розв'язків рівняння або нерівності: $|x| = 12$; $|-x| = 2$; $|x| < 5$; $|x| \geq 5$; $|x| \leq 1{,}3$.

2. При яких значеннях є правильною рівність: $x = |x|$, $|-x| = -x$, $-x = |x|$?

3. Придумайте рівняння чи нерівність, щоб у них були такі розв'язки: $x = \pm 3$; $x_1 = -2, x_2 = 4$; $0 \leq x \leq 4$; $x \leq 2$ *та* $x \geq 6$; $(-1;5)$; $[2;8]$.

## 2. РІВНЯННЯ З МОДУЛЕМ

### 2.1. Найпростіші рівняння

*До них віднесемо рівняння виду* $|f(x)| = b$, *де* $f(x)$ *– деяка функція,* $b \in R$.

Якщо $b < 0$, то рівняння $|f(x)| = b$ розв'язків не має.

Якщо $b = 0$, то $|f(x)| = b$ рівносильне рівнянню $f(x) = b$.

Якщо $b > 0$, то $|f(x)| = b$ рівносильне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x) = b, \\ f(x) = -b \end{array}\right.$.

Наведемо *приклади* таких рівнянь та їх розв'язань.

**№1.** $|x - 4| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 4 = 3 \\ x - 4 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Відповідь: $\{1;\ 7\}$

**№2.** $|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 5 \\ 2x - 3 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 8 \\ 2x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Відповідь: {-1; 4}

**№3.** $|x^2 - 4x| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x = 4 \\ x^2 - 4x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x - 4 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 + 2\sqrt{2} \\ x_2 = 2 - 2\sqrt{2} \\ x_3 = 2 \end{array}\right.$.

Відповідь: $\{2; 2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}\}$

**№4.** $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = 1 \\ \frac{x+1}{x-1} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x+1-x+1}{x-1} = 0 \\ \frac{x+1+x-1}{x-1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2}{x-1} = 0 \\ \frac{2x}{x-1} = 0 \end{array}\right.$

Перше рівняння в сукупності $\frac{2}{x-1} = 0$ розв'язків не має, оскільки дріб рівний 0, якщо чисельник рівний нулю, а знаменник йому не дорівнює. У нашому випадку 2≠0, отже $x \in \varnothing$. Розв'яжемо друге рівняння: $\frac{2x}{x-1}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x\neq 1 \end{array}\right.$ Відповідь $x=0$.

**№5.** $|x^2+3x-2|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-4=0 \\ x^2+3x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x+4)=0 \\ x(x+3)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-4 \\ x_3=0 \\ x_4=-3 \end{array}\right.$.

Відповідь: $\{-4;-3;0;1\}$.

### Завдання для самостійної роботи

*Розв'язати рівняння:*

1) $|x-1|=3$, $\{4;-2\}$
2) $|x-7|=2$, $\{5;9\}$
3) $|\sqrt{2x}-5|=3$, $\{2;32\}$
4) $|x+2|=3$, $\{1;-5\}$
5) $|x+4|=2$, $\{-6;-2\}$
6) $|2x+1|=4$, $\{1{,}5;-2{,}5\}$
7) $|3x-2|=6$, $\left\{-\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right\}$
8) $|5x+2|=-2$, $x\in\varnothing$
9) $|5x^2-3|=2$, $\left\{-1;-\frac{1}{\sqrt5};\frac{1}{\sqrt5};1\right\}$
10) $|9-x^2|=5$, $\{-2;-\sqrt{14};2;\sqrt{14}\}$

### 2.2. Рівняння виду $|f(x)|=g(x)$, де $f(x), g(x)$ деякі функції.

Наведемо два способи заміни даного рівняння сукупністю систем або однією системою.

*1-й спосіб.*

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ f(x)=g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ -f(x)=g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

*2-й спосіб.*

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

Наведемо *приклади* рівнянь та їх розв'язань.

**№1.** $|x^2-2x|=3-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-2x=3-2x, \\ x^2-2x=-3+2x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x^2=3, \\ x^2-4x+3=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\leq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x^2=3, \\ x^2-4x+3=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt3, \\ x=1, \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt3, \\ x=1 \end{array}\right.$. Відповідь: $\{-\sqrt3;1\}$.