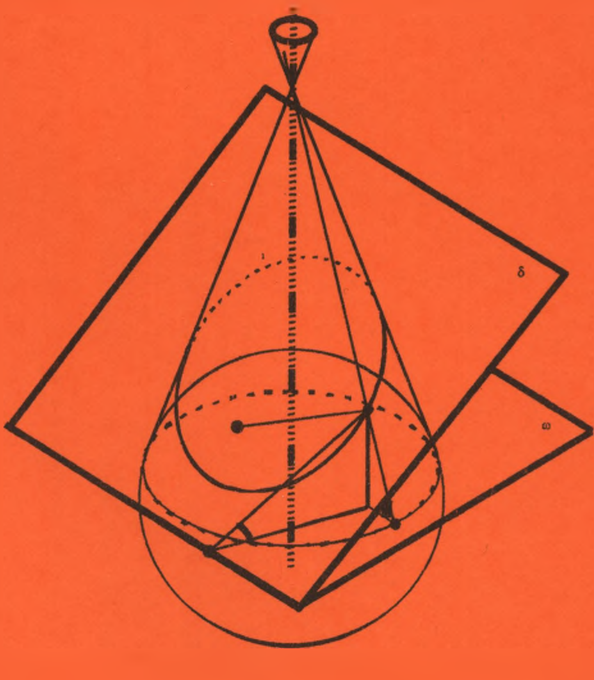
І. Г. Ленчук, С. П. Семенець

ГЕОМЕТРІЯ

ЧАСТИНА І

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ



І. Г. Ленчук, С. П. Семенець

ГЕОМЕТРІЯ

ЧАСТИНА І

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

навчально-методичний посібник

Видавництво ЖДУ ім. І. Франка

Житомир
2006

ББК 22.15р
Л82
УДК 514(07)

Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка, протокол № 6 від 27 січня 2006р.

Рецензенти:

Л. В. Лось – доктор технічних наук, академік Інженерної академії України, заслужений діяч науки і техніки України, професор;

В. В. Михайленко – доктор фізико-математичних наук, професор;

Б. М. Ляшенко – доктор фізико-математичних наук, доцент.

Ленчук І. Г., Семенець С. П.

Л82 Геометрія. Частина І. Аналітична геометрія на площині: Навчально-методичний посібник. – Житомир: Вид-до ЖДУ ім. І.Франка, 2006. – 124 с.

ISBN 966-8456-58-0

Підготовлений авторами навчально-методичний посібник відповідає діючій програмі для фізико-математичних спеціальностей університетів напрямку „Педагогічна освіта". Він містить теоретичний та практичний курси аналітичної геометрії на площині, дворівневі системи задач для самостійного розв'язування із наведеними відповідями та вказівками. Особливістю навчального посібника є розгляд теоретичних питань курсу геометрії з позиції їх історичного становлення та розвитку, проблемний виклад матеріалу, значне місце для самостійної навчальної діяльності студентів.

22.15р

Навчальне видання

Ленчук Іван Григорович, Семенець Сергій Петрович

ГЕОМЕТРІЯ. ЧАСТИНА І.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ
Навчально-методичний посібник

Надруковано з авторського оригінал-макета
Підписано до друку 16.02.06. Формат 60х90/16. Ум. друк. арк. 7.3.
Обл. вид. арк. 4.11. Друк різографічний.
Гарнітура Times New Roman. Зам. 46. Наклад 100.

Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка
Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ЖТ №10 від 07.12.04 р.
м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40
електронна пошта (E-mail): zu@zu.edu.ua

ISBN 966-8456-58-0

Зміст

Передмова

Аналітична геометрія ґрунтується на взаємно однозначн відповідностях: кожній точці площини – два впорядковані дійсні числ кожній кривій – рівняння, яке пов'язує координати її біжучої точки. Завдя цьому геометричні факти можуть бути переведені на мову алгебр геометричні задачі можуть бути розв'язані методами алгебри. Основна ід аналітичної геометрії полягає в тому, щоб реалізувати потужний та дієви апарат алгебри у процесі розв'язування геометричних задач.

Ця книга може бути використана як навчальний підручник для студент педагогічних спеціальностей університетів, вона містить обов'язкови лекційний курс аналітичної геометрії на площині, що передбачени навчальною програмою. Особливістю його є те, що він викладений у тісном зв'язку із елементарною (шкільною) геометрією і тому сприяє забезпеченн якісної фахової підготовки майбутнього вчителя математики або викладач педагогічного вузу.

З метою формування у студентів позитивних мотивів навчання геометрі перш за все – виховання стійких пізнавальних інтересів, у навчальном підручнику реалізується персоніфікований виклад матеріалу, тобто анал геометричних фактів в аспекті їх історичного становлення і розвитку. Автор намагалися дотримуватись принципу пріоритету розвивальної функці навчання. Так досить часто використовується проблемний виклад матеріалу передбачається доведення і дослідження окремих теоретичних питан самими студентами, наводяться приклади розв'язання опорних (базових задач курсу аналітичної геометрії на площині. У кінці кожної теми пропонується система задач для самостійного розв'язування, до складу яко входять задачі двох категорії: базові (обов'язкові) та підвищеного рівн складності. Важливо, що до кожної задачі дається відповідь або вказівка. Ц дасть змогу викладачеві на практичних заняттях реалізовуват диференціацію навчання, забезпечувати розвиток та професійне зростанн усіх студентів. При створенні навчального підручника авторами ставилис ряд дидактичних цілей:

- навчати студентів самостійно мислити у процесі розв'язуванн теоретичних, практичних, прикладних задач курсу аналітичної геометрії н площині;
- розв'язувати існуючу в системі освіті проблему походженн математичних (геометричних) знань;
- розвивати теоретичне мислення студентів насамперед завдяки реалізації загальнонаукового дедуктивного методу побудови математичної теорії, векторно-координатного методу розв'язування геометричних задач.
- розв'язувати проблему формування навчальної та професійної діяльностей майбутніх учителів математики.

Автори висловлюють щиру вдячність М.П. Лисенку за цінні методичні поради в процесі редагування підручника. Сподіваємося, що книга зацікавить перш за все студентів та сприятиме їх самоосвіті, саморозвитку та самореалізації в навчально-професійній діяльності.

Тема №1 Прямокутні декартові координати на площині

Лекція №1

1. *Введення координат на площині.*
2. *Відстань між двома точками.*
3. *Поділ відрізка в заданому відношенні.*
4. *Теорема Чеви.*
5. *Задачі для самостійного розв'язування.*

Ще в давнину доведення теорем замінялись геометричним рисунком, який супроводжувався коротко словом: „Дивись!". Ідея зображати числа у вигляді точок, а точки позначати числом, істотно прискорила розвиток науки в цьому напрямку. Але як „пов'язати" числа і точки? Одним із найефективніших засобів стали системи координат. Найпростіша із них – числова пряма. Однак, якщо точку на прямій можна задати одним-єдиним числом, то точку на площині – вже двома числами. Найбільш вдалою системою координат на площині виявилась прямокутна система координат. Її ще називають прямокутною декартовою – в честь французького математика Рене Декарта, роботи якого мали великий вплив на становлення і розвиток аналітичної геометрії – розділу математики, який вивчає геометричні об'єкти методами алгебри.

1. Введення координат на площині

Проведемо на площині дві взаємно перпендикулярні прямі Ox і Oy, які будемо називати осями координат *(рис 1)*.

Точкою O перетину цих прямих, початком координат, кожна із осей розбивається на дві півосі. Домовимося одну з них називати додатною, і будемо позначати стрілкою, а другу - від'ємною.

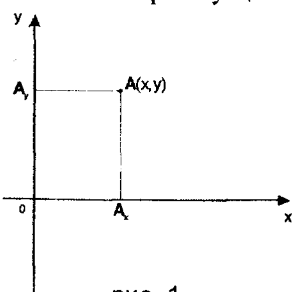


рис. 1

Всякій точці A на площині поставимо у відповідність пару чисел: координати точки A – абсцису x і ординату y за таким правилом.

Через точку A проведемо пряму, паралельну осі ординат. Вона перетне вісь абсцис *(Ox)* в деякій точці A_x.

Під абсцисою точки A будемо розуміти число x, яке дорівнює за абсолютною величиною відстані від точки O до точки A_x і є додатнім, коли A_x належить додатній півосі і від'ємним, коли A_x належить від'ємній півосі. Якщо точка A_x співпадає з точкою O, то покладемо, що $x = 0$.

Ордината точки A означається аналогічно (обґрунтуйте самостійно).

Координати точки будемо записувати в круглих дужках поряд з буквеним позначенням точки: $A(x, y)$. Осі координат розбивають площину на чотири прямих кути: квадранти – I, II, III, IV *(рис 2)*.

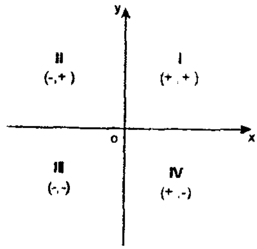


рис. 2

У межах одного квадранта знаки координат точок зберігаються. Точки осі абсцис мають рівні нулю ординати, а точки осі ординат – рівні нулю абсциси.

Для точки O $x=0$ (абсциса), $y=0$ (ордината). Площина, на якій введено описаним вище способом координати x, y, будемо називати площиною xy, або координатною площиною. Довільну точку на цій площині будемо, інколи, позначати (x, y).

Таким чином, ми кожній точці координатної площини поставили у відповідність пару (x, y) дійсних чисел. Доведемо обернене: для довільної пари дійсних чисел x і y існує, і при тому єдина, точка A на площині xy, для якої x буде абсцисою, а y - ординатою.

Справді, нехай для визначеності $x>0$, а $y<0$. Візьмемо на додатній півосі x точку A_x на відстані x від початку координат, а на від'ємній півосі y – точку A_y на відстані $|y|=OA_y$. Проведемо через точки A_x і A_y прямі, паралельні осям Oy і Ox відповідно *(рис 3)*.

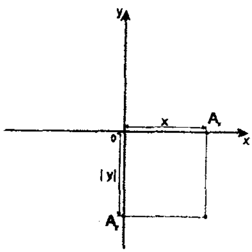


рис. 3

Ці прямі перетнуться в деякій точці А, абсциса якої очевидно x і ордината y. Дві взаємно перпендикулярні прямі мають єдину точку перетину. Для випадків $x<0, y>0$; $x>0, y>0$; $x<0, y<0$ доведення аналогічне.

Отже, ми встановили взаємно однозначну відповідність між точками площини і впорядкованими парами дійсних чисел, тобто ввели координати на площині.

2. Відстань між двома точками.

Нехай на площині ху дано дві точки своїми координатами: $A_1(x_1,y_1)$; $A_2(x_2,y_2)$. Виразимо відстань між точками A_1 і A_2 через їх координати. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$. Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі, паралельні осям координат *(рис 4)*.

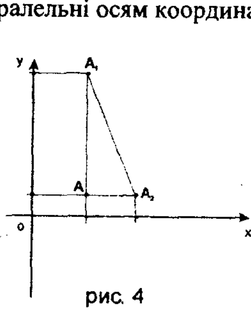


рис. 4

Очевидно $AA_1=|y_1-y_2|$, $AA_2=|x_1-x_2|$. З прямокутного трикутника AA_1A_2 одержуємо

$$A_1A_2^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

Тобто $\rho(A_1,A_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ (1).

Якщо: $x_1=x_2$, то $\rho(A_1,A_2)=|y_1-y_2|$;

$y_1=y_2$, то $\rho(A_1,A_2)=|x_1-x_2|$;

$x_1=x_2$ і $y_1=y_2$, то $\rho(A_1,A_2)=0$. Тоді точки A_1 і A_2 співпадають.

Задача. Знайти координати центра кола, описаного навколо трикутника з вершинами *(2,-2), (-2,2), (1,5).*

Розв'язання: Нехай *O(x, y)* – центр кола. Відстань від нього до вершин однакова. Тому для знаходження центра кола розв'язуємо систему:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=(x+2)^2+(y-2)^2\\(x-2)^2+(y+2)^2=(x-1)^2+(y-5)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\x-7y+9=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $O\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

3. Ділення відрізка в даному відношенні.

Нехай на площині *XY* дано дві різні точки $A_1(x_1,y_1)$; $A_2(x_2,y_2)$. Знайдемо координати точки *A*, яка ділить відрізок A_1A_2 у відношенні $\lambda_1 : \lambda_2$.

Нехай відрізок A_1A_2 не паралельний осі *Ox*. Спроеціюємо точки A_1, A_2 на вісь *Oy (рис 5).* Маємо $\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

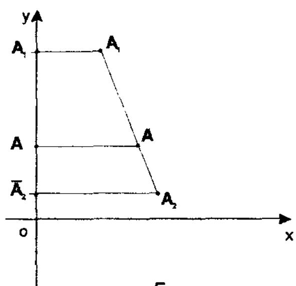


рис. 5

Оскільки точки $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A}$ мають відповідно ті ж ординати, що і точки A_1, A_2, A, то $\overline{A_1}\,\overline{A}=|y_1-y|, \overline{AA_2}=|y-y_2|$.

Отже, $\frac{|y_1-y|}{|y-y_2|}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Оскільки точка *A* лежить між точками A_1 і A_2, то y_1-y і y-y_2 мають один і той же знак.

Тому $\frac{|y_1-y|}{|y-y_2|}=\frac{y_1-y}{y-y_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Звідси знаходимо

$$\lambda_2 y_1-\lambda_2 y=\lambda_1 y-\lambda_1 y_2.$$

Тоді $$y=\frac{\lambda_2 y_1+\lambda_1 y_2}{\lambda_1+\lambda_2} \qquad (2).$$

Аналогічно $$x=\frac{\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Якщо відрізок $A_1A_2 \parallel Ox$, то $y_1=y_2=y$.

При $A_1A_2 \parallel Oy$, то $x_1=x_2=x$.

Якщо $\lambda_1=\lambda_2$, то $x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}$. (3).

Часто відношення $\lambda_1 : \lambda_2$ позначають λ.

Тоді $y = \dfrac{\lambda_2(y_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} y_2)}{\lambda_2(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2})} = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$. Аналогічно $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$.

Рівності: $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$ (4)

є формулами поділу відрізка у заданому відношенні.

4. Теорема Чеви.

Якщо сторони трикутника при послідовному обході його вершин діляться у відношенні *a:b*, *c:a*, *b:c*, то відрізки, які з'єднують вершини трикутника із точкою поділу протилежних сторін, перетинаються в одній точці.

Нехай $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ – вершини трикутника *(рис. 6)*.

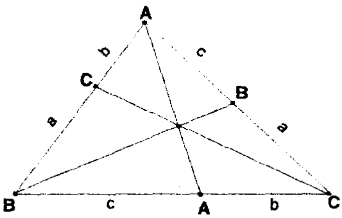


рис. 6

Координати точки $\bar{A}$:

$$x = \frac{bx_2 + cx_3}{b+c}, y = \frac{by_2 + cy_3}{b+c}$$

Поділимо відрізок $A\bar{A}$ у відношенні $(b+c):a$.

Координати точки поділу будуть:

$$x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}$$

Якщо відрізок $B\bar{B}$ поділити у відношенні $(a+c):b$ і відрізок $C\bar{C}$ - у відношенні $(a+b):c$, то в кожному випадку одержимо ті ж координати *x* та *y*. Тому відрізки $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $C\bar{C}$ мають спільну точку, що і треба було довести.

Теореми елементарної геометрії про перетин медіан, бісектрис і висот трикутника є частинним випадком цієї теореми. Так, у випадку висот маємо *(рис. 7)*:

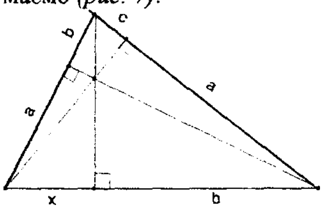


рис. 7

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} = \dfrac{a+b}{x+b} \\ \dfrac{b}{c} = \dfrac{c+a}{a+b} \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{x+b}{c+a} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{x}{c} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = c}}.$$

5. Задачі для самостійного розв'язування.

1. Довести, що медіани та бісектриси кутів довільного трикутника перетинаються в одній точці.

2. Прямі AP, BP, CP перетинають сторони трикутника ABC (або їх продовження) в точках A_1, B_1, C_1. Довести, що:

а) прямі, які містять середини сторін BC, CA, AB і паралельні прямим AP, BP, CP відповідно, перетинаються в одній точці;

б) прямі, які проходять через середини сторін BC, CA, AB і середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 відповідно, перетинаються в одній точці.

3*. На сторонах *BC, CA, AB* трикутника *ABC* вибрані точки A_1, B_1, C_1, так, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Прямі A_1B_1 і A_1C_1 перетинають пряму, яка проходить через вершину *A* паралельно стороні BC, в точках C_2, B_2 відповідно. Довести, що $AB_2 = AC_2$.

4. Відомі три вершини паралелограма *A(3, –5), B(5, –3), C(–1, 3)*. Визначити четверту вершину *D*, яка протилежна до *B*.

5. Дано вершини трикутника *A(3, –5), B(–3, 3), C(–1, –2)*. Визначити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині А.

6. Дано вершини трикутника *A(–3, 6), B(9, –10), C(–5, 4)*. Визначити центр *O* і радіус *R* описаного навколо нього кола.

7. Дано координати вершин трикутника: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. Обчислити координати точки *M* перетину його медіан.

8*. Дано вершини трикутника: *A(3, –5), B(1, –3), C(2, –2)*. Визначити довжину бісектриси його зовнішнього кута при вершині *B*.

9. Довести, що трикутник з вершинами *A(1, 1), B(2, 3), C(5, –1)* є прямокутним.

10. Знаючи вершини кутів трикутника: *A(5, 0), B(0, 1), C(3, 3)*, обчислити його внутрішні кути.

Відповіді та вказівки до задач.

1. Вказівка. Скористайтесь теоремою Чеви.

2. Вказівка. Нехай A_2, B_2, C_2 – середини сторін BC, CA, AB. Розглянуті прямі проходять через вершини трикутника $A_2B_2C_2$ і в задачі а) ділять його сторони у тому ж відношенні, у яких прямі AP, BP, CP ділять сторони трикутника ABC, а в задачі б) вони ділять їх у обернених відношеннях. Далі скористайтесь теоремою Чеви.

3. Вказівка. Скористайтесь тим, що ΔAC_1B_2 і ΔBC_1A_1, ΔAB_1C_2 і ΔCB_1A_1 – подібні та теоремою Чеви.

4 *D(–3, 1)*.

5. $\frac{14}{3}\sqrt{2}$. Вказівка. Скористайтесь властивістю бісектриси кута трикутника і знайдіть координати точки перетину бісектриси із стороною трикутника.

6. $O(3, -2)$, $R=10$.

7. $M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

8. Вказівка. Скористайтесь властивістю бісектриси кута трикутника і знайдіть координати точки перетину бісектриси із стороною трикутника.

9. Вказівка. Скористатися ознакою прямокутного трикутника.

10. $\angle BAC = 45^0, \angle ABC = 45^0, \angle ACB = 90^0$.

Лекція №2

1. Поняття про рівняння кривої. Рівняння кола. Коло Аполлонія.

2. Канонічне рівняння еліпса.

3. Рівняння кривої в параметричній формі.

4. Задачі для самостійного розв'язування.

До основних понять аналітичної геометрії відноситься поняття „рівняння" кривої. Одним із перших, хто почав вивчати криві був учень Платона, древньогрецький математик Менехм (IV століття до н. е.). Розв'язуючи задачу про подвоєння куба, Менехм задумався: „А що одержиться, якщо розрізати конус площиною, яка перпендикулярна його твірній? Які криві одержаться?". Так, змінюючи кут при вершині прямого кругового конуса, Менехм одержав три види кривих: еліпс – якщо кут при вершині конуса гострий; параболу – якщо кут прямий; одну вітку гіперболи – якщо кут тупий. Однак назву цих кривих, які стали вже звичними, придумав не Менехм (див. далі).

1. Поняття про рівняння кривої. Рівняння кола.

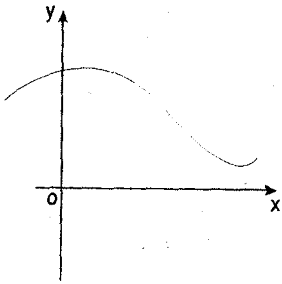


рис. 1

Нехай на площині XY дано деяку лінію, або говорять, криву *(рис.1)*. Рівняння $f(x,y)=0$ називають рівнянням кривої в неявній формі, якщо йому задовольняють координати x,y любої точки цієї кривої і довільна пара чисел x,y, що задовольняє рівняння $f(x,y)=0$, являють собою координати точки кривої. Очевидно, що на площині крива цілком визначається своїм рівнянням, тому можна говорити про задання кривої її рівнянням.

В аналітичній геометрії часто розглядають дві взаємно обернені задачі:

1) за заданими геометричними властивостями кривої скласти її рівняння;
2) за заданим рівнянням кривої встановити її геометричні властивості.

Розглянемо ці задачі стосовно найпростішої кривої – кола. Нехай $A_0(x_0, y_0)$- довільна точка площини і R- довільне додатне число. Складемо рівняння кола з центром A_0 і радіусом R.

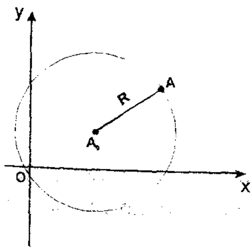


рис. 2

Нехай $A(x,y)$ – довільна точка кола *(рис. 2)*. Її відстань від центра A_0 рівна R (за означенням кола). За формулою відстані між двома точками знаходимо квадрат відстані від точки A до точки A_0: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$.

Отже, координати x,y кожної точки кола задовольняють рівняння

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (*).$$