Чемерис О. А.,
кандидат педагогічних наук, доцент

ОМБІЛІЧНІ ТОЧКИ ЕЛІПСОЇДА

Означення – це коротка й цілісна за формою характеристика поняття, яка виражає його зміст та досягнута тим чи іншим формально-логічним способом (операцією з поняттям). Визначення одного й того ж поняття можуть враховувати, розкривати різні моменти в його змісті, спиратися на певні ознаки явища, тому його означень може об'єктивно бути багато [1].

У різних розділах геометрії одне й те саме поняття означається по-різному, оскільки відрізняються основні методи цих розділів (координатний – в аналітичній геометрії, центрального проектування – в проективній, диференціального та інтегрального числення – в диференціальній геометрії тощо). А розбіжні означення одного й того самого поняття у різних розділах геометрії дають свої способи описання його характеристик. Розглянемо класичну задачу диференціальної геометрії щодо відшукання омбілічних точок, наприклад, еліпсоїда.

У диференціальній геометрії *точка називається омбілічною, якщо в ній індикатриса Дюпена є колом* [3, с. 134]. Звідси випливає І спосіб знаходження омбілічних точок, а саме, через дослідження квадратного рівняння деякої центральної кривої другого порядку:

$$\frac{L}{E}x^2 + \frac{M}{\overline{EG}}xy + \frac{N}{G}y^2 = \pm 1 \text{ [3, с. 132].}$$

ІІ спосіб знаходження омбілічних точок полягає в тому, що в них кривина

$k_n = \frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$ не залежить від вибору напрямів $du{:}\,dv$, тому коефіцієнти першої та другої квадратичних форм пропорційні: $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$ [3, с. 134-135].

Цю саму пропорційність коефіцієнтів можна отримати при розгляді питання про головні напрями індикатриси Дюпена, яка відповідає точці поверхні [3, с. 139]. Головні напрями є одночасно взаємно перпендикулярними і взаємно спряженими. Скористаємось результатом для визначення головних напрямів:

$$\begin{array}{cc} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \end{array} = 0,$$

або $EM - FL\ du^2 + \ EN - GL\ dudv + \ FN - GM\ dv^2 = 0.$

Поділимо обидві частини цієї рівності на du^2 та й дістанемо

$$FN - GM \ \frac{dv^2}{du^2} + + \ EN - GL \ \frac{dv}{du} + EM - FL = 0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння відносно $\frac{dv}{du}$ і матимемо:

$$\frac{dv}{du} = \frac{- \ EN - GL \ \pm \ \overline{\ EN - GL \ ^2 - 4 \ FN - GM \ \ EM - FL \ }}{2 \ FN - GM}.$$

Якщо головні напрями не визначені, то попередній запис (рівняння) є виродженим, отже, усі його коефіцієнти дорівнюють нулю: $FN - GM = 0$, $EN - GL = 0$, $EM - FL = 0$, тому маємо пропорційність коефіцієнтів:

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} \text{ [3, с. 140].}$$

У курсі аналітичної геометрії з омбілічними точками ми зустрічаємся при вивченні питання про колові перерізи поверхонь другого порядку. Колові перерізи мають: 1) усі поверхні обертання; 2) поверхні другого порядку, рівняння яких можна подати в такому вигляді: $A \ x^2 + y^2 + z^2 \ + \alpha\beta + \gamma = 0$, де α, β, γ – лінійні вирази відносно x, y, z (мають дві серії колових перерізів) [2, с. 229].

Коли поверхня другого порядку замкнена, то серед площин, паралельних площинам колових перерізів, є такі, що зовсім її не перетинають, а також такі, що дотикаються до неї, або, як кажуть, перетинають її по колах нульового радіуса. Точки дотику цих площин з поверхнею називають точками закруглення, або омбілічними точками поверхні. Омбілічні точки поверхні обертання є точками перетину поверхні обертання з віссю обертання [2, с. 230].

Розв'яжемо задачу 5 з посібника [2, с. 232].

Завдання*: визначити точки закруглення (омбілічні точки) еліпсоїда* $x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 15$.

Розв'язання. Перейдемо в рівняння еліпсоїда до параметричної форми. Можна прийняти за параметри координати y та z, тоді в координатно-параметричній формі рівняння еліпсоїда набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} x &= \overline{15 - 2u^2 - 6v^2} \\ y &= u \\ z &= v \end{aligned} .$$

Але враховуючи, що далі ми будемо працювати з похідними першого та другого порядків від ірраціональних виразів, для повного розв'язання задамо еліпсоїд в полярно-сферичній системі координат:

$$\begin{cases} x = \sqrt{15}\sin u \cos v \\ y = \sqrt{\frac{15}{2}}\cos u \cos v \\ z = \sqrt{\frac{5}{2}}\sin v \end{cases}.$$

Обчислимо частинні похідні першого порядку для знаходження коефіцієнтів першої квадратичної форми:

$$\begin{cases} x_u = \sqrt{15}\cos u \cos v \\ y_u = -\sqrt{\frac{15}{2}}\sin u \cos v \\ z_u = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_v = -\sqrt{15}\sin u \sin v \\ y_v = -\sqrt{\frac{15}{2}}\cos u \sin v \\ z_v = \sqrt{\frac{5}{2}}\cos v \end{cases}.$$

Отже,

$$E = {r_u}^2 = \cdots = \frac{15}{2}\cos^2 v \left(1 + \cos^2 u\right),$$

$$F = r_u r_v = \cdots = -\frac{15}{2}\sin u \cos u \sin v \cos v,\ G = {r_v}^2 = \cdots = \frac{15}{2}\sin^2 v\left(1 + \sin^2 u\right) + \frac{5}{2}\cos^2 v.$$

Обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{cases} x_{uu} = -\sqrt{15}\sin u \cos v \\ y_{uu} = -\sqrt{\frac{15}{2}}\cos u \cos v \\ z_{uu} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{uv} = -\sqrt{15}\cos u \sin v \\ y_{uv} = \sqrt{\frac{15}{2}}\sin u \sin v \\ z_{uv} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_{vv} = -\sqrt{15}\sin u \cos v \\ y_{vv} = -\sqrt{\frac{15}{2}}\cos u \cos v \\ z_{vv} = -\sqrt{\frac{5}{2}}\sin v \end{cases}.$$

Тоді коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$L = \frac{1}{\Delta}\left(r_{uu}, r_u, r_v\right),\ M = \frac{1}{\Delta}\left(r_{uv}, r_u, r_v\right),\ N = \frac{1}{\Delta}\left(r_{vv}, r_u, r_v\right),\ \text{де}\ \Delta = E * G - F^2.$$

Підставимо:

$$L = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -\sqrt{15}\sin u \cos v & -\sqrt{\frac{15}{2}}\cos u \cos v & 0 \\ \sqrt{15}\cos u \cos v & -\sqrt{\frac{15}{2}}\sin u \cos v & 0 \\ -\sqrt{15}\sin u \sin v & -\sqrt{\frac{15}{2}}\cos u \sin v & \sqrt{\frac{5}{2}}\cos v \end{vmatrix} = \frac{15\sqrt{5}}{2\Delta}\cos^3 v,$$

$$M=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -\sqrt{15}cosu\,sinv & \sqrt{\frac{15}{2}}sinu\,sinv & 0 \\ \sqrt{15}cosu\,cosv & -\sqrt{\frac{15}{2}}sinu\,cosv & 0 \\ -\sqrt{15}sinu\,sinv & -\sqrt{\frac{15}{2}}cosu\,sinv & \sqrt{\frac{5}{2}}cosv \end{vmatrix}=0,$$

$$N=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -\sqrt{15}sinu\,cosv & -\sqrt{\frac{15}{2}}cosu\,cosv & -\sqrt{\frac{5}{2}}sinv \\ \sqrt{15}cosu\,cosv & -\sqrt{\frac{15}{2}}sinu\,cosv & 0 \\ -\sqrt{15}sinu\,sinv & -\sqrt{\frac{15}{2}}cosu\,sinv & \sqrt{\frac{5}{2}}cosv \end{vmatrix}=\frac{15\sqrt{5}}{2\Delta}cosv.$$

Підставимо знайдені вирази для коефіцієнтів квадратичних форм в умову омбілічних точок $\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}$:

$$\frac{\frac{15\sqrt{5}}{2\Delta}cos^3v}{\frac{15}{2}cos^2v\,(1+cos^2u)}=\frac{0}{-\frac{15}{2}sinu\,cosu\,sinv\,cosv}=\frac{\frac{15\sqrt{5}}{2\Delta}cosv}{\frac{15}{2}sin^2v\,(1+sin^2u)+\frac{5}{2}cos^2v}.$$

Розв'язавши дану систему, маємо $cosu=0,\ sinv=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$. Остаточно, маємо $x=\pm3,\quad y=0,\quad z=\pm1$, або висновок: заданий еліпсоїд має чотири омбілічні точки: $(3,0,1)$, $(-3,0,1)$, $(3,0,-1)$, $(-3,0,-1)$.

В аналітичній геометрії ця задача на знаходження омбілічних точок для поверхонь другого порядку розв'язується швидше.

Зробимо наступні перетворення з рівнянням еліпсоїда:

$$2(x^2+y^2+z^2)+4z^2-x^2=15,$$
$$2(x^2+y^2+z^2)+(2z-x)(2z+x)=15.$$

Отже, площини $2z-x=u$ $(u=const)$ та $2z+x=v$ $(v=const)$ перетинають еліпсоїд по колах. Взагалі еліпсоїд має чотири точки заокруглення [2, с. 231]. Знайдемо їх як точки дотику дотичних площин, паралельних заданим.

З рівняння поверхні вектор нормалі дотичної площини має координати

$$(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,12z).$$

Вектори нормалей площин, що є коловими перерізами, мають координати $(\pm1,0,2)$. Площини – паралельні, тому вектори нормалей колінеарні, тобто їх координати пропорційні:

$$\frac{2x}{\pm1}=\frac{4y}{0}=\frac{12z}{2}.$$

Тоді маємо $x = \pm 3z,\ y = 0$. Підставимо це в рівняння поверхні і матимемо чотири омбілічні точки: $3,0,1$, $-3,0,1$, $3,0,-1$, $-3,0,-1$.

На нашу думку, вміння студентом старших курсів означати поняття з боку різних розділів однієї науки чи певних дисциплін є важливим компонентом фахової підготовки і свідчить про його компетентність.

Література

1. Явище – поняття – визначення – термін [Електронний ресурс]. – Режим доступу до сторінки : http://stud.com.ua/30973/pravo/yavische_ponyattya_viznachennya_termin.

2. Аналітична геометрія / [Білоусова В. П., Ільїн І. Г., Сергунова О. П., Котлова В. М.]. – К. : Вища школа, 1973. – 328 с.

3. Кованцов М.І. Диференціальна геометрія / Микола Іванович Кованцов. – К. : Вища школа, 1973. – 276 с.