Вітковський Олексій,
студент IV курсу, напрям підготовки «Математика»
Науковий керівник – ***Франовський А. Ц.,***
кандидат фізико-математичних наук, доцент

ЕЛЕМЕНТАРНІ ПОБУДОВИ ЦИРКУЛЕМ ТА ЛІНІЙКОЮ З ОБМЕЖЕННЯМИ

Геометричні побудови відіграють визначну роль у математичній підготовці школярів. Ні один вид задач не дає, мабуть, стільки матеріалу для розвитку математичної ініціативи і логічних навиків учнів, як геометричні задачі на побудову з обмеженнями. Такі задачі зазвичай не допускають стандартного підходу до них і формального сприйняття для учнів. Дані задачі зручні для закріплення теоретичних знань учнів з будь-якого розділу шкільного курсу геометрії.

Геометричні побудови зацікавили математиків ще в епоху античності. Побудовами займалися Фалес Мілетський, Евдокс, Евклід “Початки”. Пізніше ця тема захоплює все більше і більше науковців: Рене Декарт, Георг Мор, Лоренцо Маскероні “Геометрія циркуля”, Гаус та ін..

Отримані відкриття дали поштовх до розвитку проективної геометрії, креслярства. Актуальність та зацікавленість науковців викликає необхідність з’ясувати чи можливо за допомогою лише одного циркуля розв’язувати задачі на побудову, що і є метою даної статті.

Все починалося з Евкліда. У IV столітті до н.е. Евклід пише працю “Початки”, у яких зібрав і привів у логічну систему весь геометричний матеріал, що був накопичений на той час. На основі праці Евкліда побудована вся конструктивна геометрія, в якій і надалі розглядаються дані побудови. Розглянемо на чому стоїть конструктивна геометрія.

Основою конструктивної геометрії являється система аксіом, яка включає дві групи аксіом:

I. Загальні аксіоми:

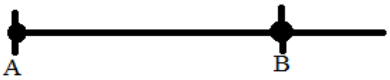
1. Якщо фігура задана в умові задачі, то вона побудована на кресленні.
2. Якщо побудовані дві чи більше фігури, то побудовано і об’єднання цих фігур.
3. Якщо різниця двох побудованих фігур є не порожньою сукупністю, то вони побудовані.
4. Якщо перетин двох фігур є не порожньою сукупністю, то він побудований.

5. Можна взяти точки, які напевно належать заданій фігурі.

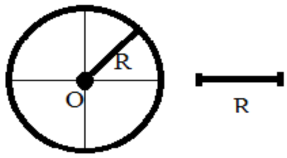
6. Можна взяти точки, які напевно не належать заданій фігурі.

II. Аксіоми циркуля та лінійки:

1. Аксіома лінійки: якщо побудовані дві точки A і B, то побудований і промінь. 

Наслідок 1: якщо задано дві точки A і B, то можна побудувати відрізок AB. 

Наслідок 2: якщо задано дві точки A і B, то можна побудувати пряму AB. 

2. Аксіома циркуля: якщо побудовано точку і деякий відрізок R, то можна побудувати коло з радіусом R: 

[3].

Щодо обмежень, то у 1672-му році Георг Мор доводить головну теорему геометрії, яку він публікує у книзі «Датський Евклід», але книга нікому невідома. І лише через 152-а роки відомий італійський математик Лоренцо Маскероні доводить ту ж таки головну теорему геометрії і публікує її у роботі «Геометрія циркуля» . Перейдемо до цієї теореми, яка отримала ім’я своїх творців[1].

Теорема Мора-Маскероні: усі задачі, що розв’язуються циркулем і лінійкою, можна розв’язати за допомогою одного циркуля [2].

Для цього Мор і Маскероні звели розв’язання таких задач до низки елементарних побудов, яких виявилось п’ять. Ось вони:

1. Через дві подані точки провести пряму.
2. Із поданої точки як із центра провести коло поданого радіуса.
3. Знайти точки перетину двох поданих кіл.
4. Знайти точки перетину поданих кола і прямої, заданої двома точками.
5. Знайти точку перетину двох прямих, кожну з яких задано двома точками [1].

Якщо вдасться довести, що всі п’ять побудов виконано за допомогою циркуля, то це рівносильно доведенню теореми.

Доведемо для прикладу 1-шу елементарну побудову.

Через дві задані точки провести пряму, користуючись тільки циркулем.

Доведення. Подано дві точки А і В. Потрібно побудувати точки, що лежать на прямій АВ. Для довільної точки К поза АВ будуємо симетричну їй точку $К_1$ відносно АВ. Для цього проведемо коло Ω(А; АК), потім – коло Ω_1(В; ВК). Точка перетину двох кіл Ω і Ω_1 і буде шуканою точкою $К_1$, що випливає з рівності трикутників АКВ і $АК_1В$ за трьома сторонами (*рис.1).* Далі з точок К і $К_1$ робимо засічки довільними рівними радіусами до їхнього перетину в точці С. Очевидно, точка С належить прямій АВ (з міркувань симетрії). Отже, ми можемо побудувати безліч точок, що лежать на прямій АВ, і ними «заповнити» всю пряму (*рис. 2).* Доведено.

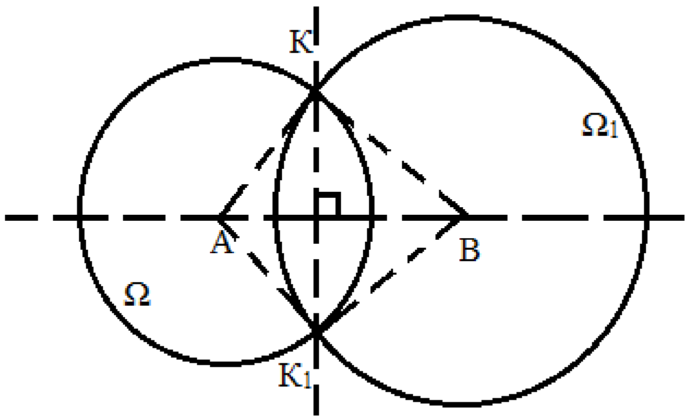


Рис. 1(побудова точки $К_1$ відносно точки К)

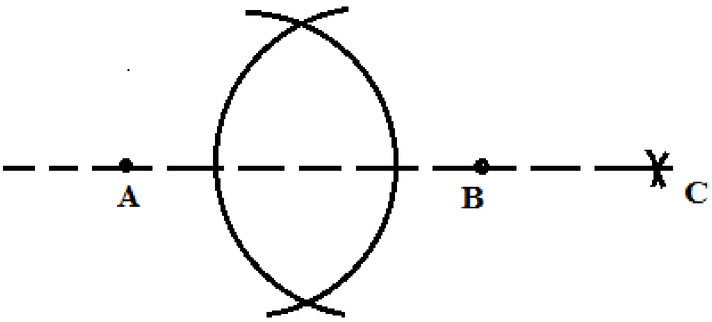


Рис. 2(побудова прямої через дві точки лише циркулем)

Таким чином, Мор та Маскероні довели свою теорему довівши істинність всіх п’яти побудов для циркуля, що показало перевагу циркуля.

Література

1. Філіпповський Г. Б. Чудові обмеження в задачах на побудову / Г.Б. Філіпповський. – Х. : Вид. група «Основа», 2011. – 143 с.

2. Аргунов Б. И. Геометрические построения на плоскости / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. – М. : Учпедгиз, 1957. – 266 с.

3. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение / И.И. Александров. – М. : Учпедгиз 1950. – 175 с.