Данчук Юлія,
магістрантка, спеціальність «Математика».
Науковий керівник – ***Чемерис О. А.****,*
кандидат педагогічних наук, доцент

ГЕОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ В ЗАДАЧАХ

На різних математичних конкурсах пропонують завдання, нетрадиційні для повсякденної навчальної діяльності в школі, серед яких досить часто зустрічаються геометричні нерівності. Ця тема є досить важкою для сприймання учнями і, здавалося б, легкі, майже очевидні нерівності частенько виявляються "міцним горішком". Щоб учні не боялися цієї теми, слід підібрати цікаві задачі.

Тема «Геометричні нерівності» не має великої теоретичної бази, але має прикладний характер. Розв'язання задач на геометричні нерівності не потребує будь-яких складних математичних знань або складної техніки, але вимагає творчого і логічного мислення. Геометричні нерівності стосуються нестандартних задач, які корисні саме тим, що не містять єдиного алгоритму розв’язування, завжди потребують пошуків нових підходів, що стимулюють пізнавальні інтереси учнів, формують навички проведення аналізу систематизації висування гіпотез, допомагають оволодіти дедуктивним методом, активізують самостійну пошукову діяльність.

Розглянемо деякі з методів, які можна застосувати при доведенні нерівностей, які пов’язані з фігурами на площині.

І. Нерівність трикутника

Добре відомо, що для трьох довільних точок А, В та С виконується нерівність $AB + BC \geq AC$ (нерівність буде строгою, якщо точка не лежать між двома іншими точками). Звідси отримуємо, що довжина ламаної не більша за відстань між її кінцями. Ці елементарні міркування часто є ключовими при доведенні нерівностей для відстаней [2, с. 85].

Задача 1. У трикутнику довжини двох сторін відповідно дорівнюють 3,14 та 0,67. Знайти довжину третьої сторони, якщо відомо, що вона виражається цілим числом.

Розв’язання. Якщо ця довжина дорівнює a, то a < 3,14+0,67 та a > 3,14-0,67. Отже, a=3 [1].

Задача 2. Довести, що для додатних чисел *a, b, c* виконується нерівність $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$.

Розв’язання. Відкладемо відрізки $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ так, щоб $\angle AOB=\angle BOC=60°$ (рис. 1.1).

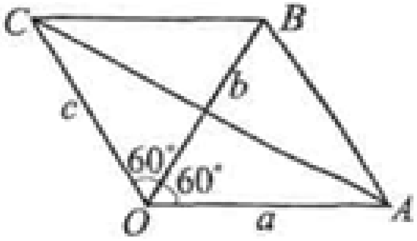

Рис.1.1.

Тоді за теоремою косинусів

$AB=\sqrt{a^2-ab+b^2}$, $BC=\sqrt{b^2-bc+c^2}$, $AC=\sqrt{a^2+ac+c^2}$.

А отже, задана нерівність зводиться до очевидної: $AB+BC\geq AC$.

Задача 3. Довести, що довжини медіан трикутника m_a, m_b, m_c і його периметр P задовольняють нерівності $\frac{3P}{4}<m_a+m_b+m_c<P$.

Розв’язання. Нехай у трикутнику ABC (рис. 1.2) $AB=c, BC=a, CA=b$ – сторони даного трикутника, $AM=m_a, BN=m_b, CK=m_c$ – його медіани.

З ΔAMK маємо $m_a=AM<AK+KM=\frac{b+c}{2}$.

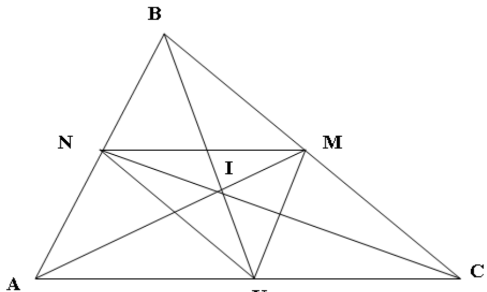

Рис.1.2.

Аналогічно отримуємо нерівності $m_b<\frac{a+c}{2}$ та $m_c<AK+KM=\frac{a+b}{2}$. Додаючи одержані співвідношення, отримуємо праву частину нерівності, що доводиться.

З ΔOBC маємо $a=BC<BO+OC=\frac{2}{3}(m_b+m_c)$. Таким же чином дістаємо нерівності $b<\frac{2}{3}(m_a+m_c)$, $c<\frac{2}{3}(m_a+m_b)$. Додамо дані три нерівності і отримуємо ліву частину співвідношення, яке потрібно довести.

Отже, доведено, що $\frac{3P}{4}<m_a+m_b+m_c<P$ [2, с 85-86].

II. Векторний метод

Інколи обґрунтування нерівності для відстаней зручно проводити, використовуючи вектори. При цьому може застосовуватися векторний аналог нерівності трикутника: $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$. У векторному вигляді нерівність трикутника можна сформулювати таким чином: довжина суми векторів не перевищує суми їх довжин [2, с 87-88].

Задача 4. На площині дано два відрізки *AB* і *CD*. Довести, що довжина відрізка, що сполучає їх середини, не більша за півсуму довжин відрізків *AC* і *BD*.

Розв'язання. Нехай точки K і L – це середини AB і CD відповідно (рис. 1.3).

Виконуються векторні рівності $\overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BC} + \overline{CL}$ та $\overline{KL} = \overline{KA} + \overline{AD} + \overline{DL}$. Додаючи їх отримуємо рівність $2\overline{KL} = \overline{BC} + \overline{AD}$, з якої переходячи до довжин векторів дістаємо $2|\overline{KL}| \le |\overline{BC}| + |\overline{AD}|$, що доводить висловлене в умові твердження. Знак рівності можливий, якщо $BC \| AD$, тобто, коли заданий чотирикутник є трапецією або паралелограмом.

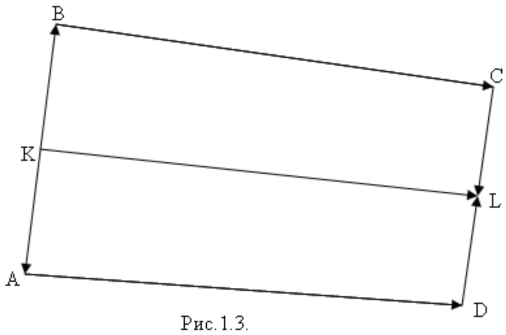

Рис.1.3.

Висновок. У статті розглянуто два методи, які можна застосувати при доведенні нерівностей, пов'язаних з фігурами на площині. Перспектива дипломної роботи полягає у подальшому вивченні методів доведення геометричних нерівностей.

Література

1. Кикоть В.М. Геометричні нерівності / Валентина Михайлівна Кикоть. – Шепетівка, 2011. – 20 с.
2. Собкович Р. Основні методи доведення нерівностей / Роман Собкович. – Івано-Франківськ, 2014. – 100 с.