Зінченко Марина,
студентка V курсу, спеціальність «Математика».
Науковий керівник – ***Сверчевська І.А.,***
кандидат педагогічних наук, доцент

ВИКОРИСТАННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ДІОФАНТОВИХ РІВНЯНЬ

Діофант є однією з найцікавіших особистостей в історії математики. Неможливо встановити ким був Діофант та точні роки його життя. Цікавою є діяльність Діофанта. До сьогоднішнього дня збереглися 7 книг із 13, які були об’єднані в «Арифметику». «Арифметика» Діофанта – це збірник задач (їх усього 189).

Діофант займався знаходженням розв’язків невизначених рівнянь та їх систем. Його цікавили лише додатні цілі числа і раціональні розв’язки. Ірраціональні розв’язки він називав «неможливими» і підбирав коефіцієнти так, щоб отримати додатні, раціональні розв’язки. Тому довільне невизначене рівняння з цілими коефіцієнтами називають «діофантовим» [1, с. 15].

Розглянемо розв’язування деяких діофантових рівнянь за допомогою тотожностей.

Розв’яжемо рівняння $x^2 + y^2 = z^2$. Його розв’язки знаходяться із тотожності

$$u^2 - v^2\ ^2 + \ 2uv\ ^2 = \ u^2 + v^2\ ^2, \qquad (2)$$

Доведемо цю тотожність:

$u^2 - v^2\ ^2 + \ 2uv\ ^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 == \ u^4 + 2u^2v^2 + v^4\ = \ u^2 + v^2\ ^2$ Основні розв’язки, тобто такі трійки чисел, які одержують, коли u і v - взаємно прості, $u > v$, можна отримати, наприклад, склавши таку таблицю 1.

Таблиця 1

$\boldsymbol{u}$	2	3	4		5		6		7			8				9		
$\boldsymbol{v}$	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	7	2	4	8
$\boldsymbol{x = u^2 - v^2}$	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13	63	55	39	15	77	65	17
$\boldsymbol{y = 2uv}$	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	112	36	72	144
$\boldsymbol{z = u^2 + v^2}$	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	113	85	97	145

Цю таблицю можна продовжувати як завгодно довго. Тому зрозуміло, що рівняння (1) має безліч розв’язків. Крім цих піфагорових чисел, можна одержувати і подібні їм, домножуючи числа кожної із трійок (*x; y; z)* на одне і те саме натуральне число [2, с. 308].

Щоб одержати розв’язки рівняння $x^2 + y^2 = z^3$ треба також мати відповідну тотожність $u^3 - 3uv^2{}^{\ 2} + \ 3u^2v - v^3{}^{\ 2} = \ u^2 + v^2{}^{\ 3}$.

Доведемо цю тотожність:

$u^3 - 3uv^2{}^{\ 2} + \ 3u^2v - v^3{}^{\ 2} = u^6 - \ 6u^4v^2 + 9u^2v^4 + 9u^4v^2 - 6u^2v^4 + +v^6 = u^6 + 3u^4v^2 + 3u^2v^4 + v^6 = \ u^2 + v^2{}^{\ 3}$ Тепер залишається замість u і v підставляти такі самі, як і в попередньому випадку, значення. Знаходимо безліч розв’язків рівняння (3), які також можна розмістити у таблиці 2. Не виникає сумніву, що цю таблицю, як і попередню, можна продовжувати і продовжувати.

Таблиця 2

u	2	3	4		5		6		7			8			
v	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	7
$x = u^3 - 3uv^2$	2	9	52	44	65	115	198	234	259	7	413	488	296	88	664
$y = 3u^2v - v^3$	11	46	47	117	142	236	107	415	286	524	666	191	549	835	1001
$z = u^2 + v^2$	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	113

Для розв'язування рівнянь $x^2 + y^2 = z^4$, $x^2 + y^2 = z^5$, $x^2 + y^2 = z^6$ маємо відповідно тотожності:

$u^4 - 6u^2v^2 + v^4{}^{\ 2} + \ 4u^3v - 4uv^3{}^{\ 2} = \ u^2 + v^2{}^{\ 4}$.

$u^5 - 10u^3v^2 + 5uv^4{}^{\ 2} + \ 5u^4v - 10u^2v^3 + v^5{}^{\ 2} = \ u^2 + v^2{}^{\ 5}$,

$u^6 - 15u^4v^2 + 15u^2v^4 - v^6{}^{\ 2} + \ 6u^5v - 20u^3v^3 + 6uv^5{}^{\ 2} = \ u^2 + v^2{}^{\ 6}$.

Відшукання розв’язків діофантових рівнянь пов’язане з десятою проблемою Гільберта. Десятою проблемою була «задача про розв'язність діофантового рівняння», сформульована так: «Нехай дано діофантове рівняння з довільними невідомими і цілими раціональними числовими коефіцієнтами. Назвіть спосіб, за допомогою якого можна після скінченого числа операцій встановити, чи розв'язне це рівняння в цілих раціональних числах».

У 1970 р. на Міжнародному математичному конгресі в Ніцці двадцятирічний аспірант Юрій Володимирович Матіясевич сколихнув математичний світ справжньою сенсацією століття – доповів про розв'язання 10-ї проблеми Гільберта. Він довів, що ніякого загального методу для розв'язання діофантового рівняння не існує. Тому важливо шукати методи розв’язання конкретних діофантових рівнянь.

Література

1. Дідківська Т.В., Сверчевська І.А. Визначні історичні задачі з теорії чисел // Актуальні питання природничо-математичної освіти : збірка наукових праць №1, СДПУ ім. А.С. Макаренка. – Суми : ВВП «Мрія», 2013. – С. 8–18.
2. Бухштаб А. А. Теория чисел.- М. : Просвещение, 1966. – 384 с.