Кадлубовська Ярослава,
магістранта, спеціальність «Математика».
Науковий керівник – ***Франовський А.Ц.,***
кандидат фізико-математичних наук, доцент

ПОНЯТТЯ «ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК НА ПЛОЩИНІ» ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Поняття геометричного місця точок у просторі (ГМТ) має велике методичне і загальноосвітнє значення. Неможливо переоцінити його роль у розвитку просторової уяви.

Розв'язування задач, в яких застосовуються геометричні місця точок як на площині, так і в просторі, активізують творчу думку і фантазію, розвивають логічне мислення, кмітливість, змушують перебирати в пам'яті всі відомі теореми з метою відбору і застосування найбільш придатної з них.

Таким чином, тема геометричні місця точок на площині та їх застосування, на сучасному етапі є досить актуальною.

Геометричне місце точок є одним з найважливіших понять геометрії. Але воно широко використовується не лише в геометрії, ай в математичному аналізі, механіці і в багатьох технічних дисциплінах. Тому поняття геометричного місця точок має велике загальноосвітнє значення.

Геометричним місцем точок називаємо фігуру, всі точки якої мають певну властивість, яка належить обов'язково і виключно точкам цієї фігури [5].

Якщо розглядати геометричне місце точок на площині, то можна одержати, наприклад: пряму, промінь, коло і інші плоскі криві, точку, сукупність ізольованих точок, сукупність прямих, відрізок, сукупність відрізків, дугу, сукупність дуг, деяку частину площини тощо.

На понятті про геометричне місце точок ґрунтується особливий спосіб розв'язування задач на побудову, що має назву методу геометричних місць. Його суть полягає у наступному: зводять всю задачу на побудову до відшукання положення на площині однієї або декількох точок, які визначаються двома умовами, що випливають з вимог задачі. Якщо відкинути одну з цих умов задачі, то вона стане невизначеною і решту умов буде задовольняти, не одна точка, а нескінченна множина точок, що утворюють якесь геометричне місце. Якщо потім відновити відкинуту умову, а відкинути другу, то решту умов, знов буде задовольняти нескінченна множина точок, що утворюють нове геометричне місце. Кожна точка перетину цих двох геометричних місць задовольняє вимогам задачі і, отже, буде шуканою. Задача матиме стільки розв'язків, скільки спільних точок мають знайдені геометричні місця [2].

Подана характеристика методу геометричних місць показує, що його застосовують при розв'язуванні таких задач, умову яких можна розчленувати на дві незалежні вимоги, кожна з яких окремо визначає відповідне геометричне місце точок. Правда, інколи одно з геометричних місць буває заданим самою умовою задачі.

Позитивними рисами методу є такі: а) при розв'язуванні задач методом геометричних місць спрощується відшукання плану розв'язування задачі і способу її побудови; б) відкидаючи одну умову задачі і змінюючи іншу, можна об'єднати декілька задач на побудову в одну групу і розглядати їх як різні варіанти деякої загальної конструктивної проблеми.

Пояснимо сказане про особливості методу геометричних місць точок на такому прикладі:

Задача. Дано трикутник *ABC*. Побудувати в площині три кутника точку *M*, яка була б на однаковій віддалі від вершин *A* та *B* і на віддалі *d* від третьої вершини *C* (рис. 1) [1, 3].

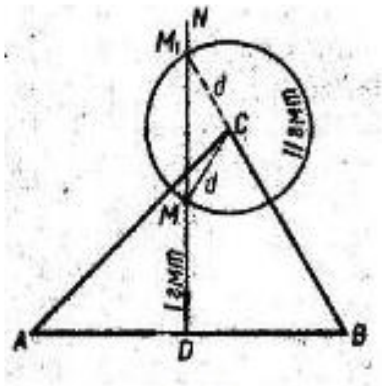

Рис. 1.

Аналіз. Шукана точка *M* повинна задовольняти дві умови: а) вона повинна знаходитись на однаковій віддалі від двох точок *A* і *B* і б) вона повинна знаходитись на віддалі *d* від третьої точки.

Відкинемо другу умову. Тоді одну першу умову буде задовольняти нескінченна множина точок, що утворюють геометричне місце – перпендикуляр, проведений через середину *D* відрізка *AB*. Збережемо тепер другу умову і відкинемо першу. Тоді одну другу умову буде задовольняти нескінченна множина точок, що утворюють геометричне місце – коло з центром в точці *C* і радіусом, рівним *d*. Точки *M* і M_1 перетину першого геометричного місця з другим будуть шуканими.

Побудова. Для розв'язування задачі потрібно побудувати перше і друге геометричні місця.

Будуємо перпендикуляр *ND* до відрізка *AB* в його середині *D* і коло радіусом, рівним *a*, з центром в *C*; точка перетину кола з перпендикуляром *ND* визначить шукану точку *M*.

Дослідження. Оскільки коло може перетинати пряму не більш ніж в двох точках, то залежно від даних (Δ *ABC* і *d*) задача може не мати жодного розв'язку або мати до двох роз в'язків. На рис. 1 показано випадок двох розв'язків.

При розв'язуванні задачі ми користувались першим і другим геометричним місцем, як даними. Ця обставина приводить до необхідності знання хоча б основних геометричних місць на площині, якщо ми бажаємо навчитись розв'язувати задачі на побудову методом геометричних місць.

Щоб знайти геометричне місце точок (фігуру), потрібно скласти за даною їх властивістю рівняння і назвати фігуру, яка визначається цим рівнянням.

Складаючи рівняння, спочатку позначаємо координати довільної точки шуканого геометричного місця трочок через *x*, *y*. Потім, застосовуючи відомі рівняння (відстані між точками, середини відрізка, кола і прямої), складаємо нове рівняння, яке аналітично виражає зв’язок між координатами шуканої і даних точок. Цим самим обґрунтуємо пряме твердження: якщо *M* – довільна точка шуканого геометричного місця точок, то її координати задовольняють знайдене рівняння. Після цього доводимо обернене твердження: якщо координати довільної точки *M* задовольняють знайдене рівняння, то вона належить шуканому геометричному місцю точок [1, 3].

Задачі на побудову, що розв’язуються методом геометричних місць, можуть бути досить різноманітними. Вони часто відрізняються одна від одної як кількістю, так і особливостями тих геометричних місць, за допомогою яких визначається положення шуканої точки. Розв’язування задачі спрощується або ускладнюється в залежності від того, в якій мірі в тексті задачі містяться прямі вказівки на ті геометричні місця, з допомогою яких дана задача може бути розв’язана [4].

Так, якщо задача подана у формі теореми, то відповідь на поставлене питання повністю або частково розв’язана і вимагається лише виконати відповідні побудови й обґрунтувати їх. Якщо ж в задачі за деякими даними вимагається побудувати певне геометричне місце точок без будь-яких вказівок до відповіді, то в такому випадку розв’язування задачі ускладнюється необхідністю спочатку знайти фігуру, утворену геометричним місцем точок, і потім відповідно обґрунтувати знайдений розв’язок [4].

Отже, в ході проведення дослідження ми дійшли висновку, що *геометричним місцем точок* називається фігура, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість. Геометричне місце точок є одним з найважливіших понять геометрії, але воно широко використовується в математичному аналізі, механіці і в багатьох технічних дисциплінах. Тому поняття геометричного місця точок має велике загальноосвітнє значення.

Література

1. Аргунов Б. И. Геометрические построения на плоскости / Б. И. Аргунов, М. Б Балк. – Москва, 1957. – 374 с. – С. 104–106.
2. Бурда М. І. Геометрія 8–9 кл. / М. І. Бурда, Л. М. Савченко. – Київ : «Освіта», 1966. – 220 с. – С. 27–30.
3. Тесленко І. Ф. Геометричні побудови / І. Ф. Тесленко. – К. : Рад. шк., 1956. – 180 с. – С. 15–21
4. Тесленко І. Ф. Елементарна математика, геометрія / І. Ф. Тесленко. –К., 1968. – 420 с.
5. Чекова А. М. Геометрія 7–11 класи / А. М. Чекова. – Харків, 2007. – 144 с.