Ковальчук Наталія,
студентка V курсу, спеціальність «Математика»
Науковий керівник – ***Сверчевська І.А.*.**
кандидат педагогічних наук, доцент

ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНИМ НЕВІДОМИМ

Розглянемо питання про розв’язування нерівностей. Нехай дано нерівність

$$F\ \ x_1, x_2, \ldots, x_n\ \ \vee \Phi\ \ x_1, x_2, \ldots, x_n\ \ .$$

Якщо нерівність містить одне невідоме, тобто має вигляд $F\ x\ \vee \Phi\ \ x$, то множиною всіх її розв’язків є деяка множина дійсних чисел. Кожне дійсне число, як відомо, зображається точкою прямої. Тому множина розв’язків нерівності з одним невідомим геометрично зображається деякою множиною точок прямої.

Якщо нерівність містить два невідомих, тобто має вигляд $F\ x, y\ \vee \Phi\ \ x, y$, то множиною її розв’язків є деяка множина пар дійсних чисел a, b . Кожна така пара зображається точкою площини. Отже, множина розв’язківнерівності з двома невідомими геометрично зображається деякою множиною точок площини.

Аналогічно можна розв’язати нерівності з трьома невідомими $F\ x, y, z\ \vee \Phi\ \ x, y, z$ геометрично зображається деякою множиною точок простору.

Розв’язуючи нерівності, застосовують той чи інший метод залежно від особливостей заданої нерівності. Проте є метод розв’язування нерівностей певною мірою універсальний. Цей загальний метод ґрунтується на такій теоремі.

Теорема. *Якщо функція $F\ x$ визначена і неперервна у проміжку a, b і не має коренів у ньому, то в цьому проміжку вона зберігає один і той самий знак.*

Доведення. Припустимо, що функція $F\ x$ не зберігає знак у проміжку a, b . Тоді існують числа a_1 і b_1 такі, що $a < a_1 < b_1 < b$ і $F\ a_1$ й $F\ b_1$ мають різні знаки. Але тоді за теоремою Больцано-Коші, є таке число $c\ a_1 < c < b_1$, що $F\ c\ = 0$, а це суперечить умові теореми. Отже, припущення, що $F\ x$ не зберігає знака у проміжку a, b , хибне. Цим теорему доведено [1, с. 161].

Припустимо тепер, що треба розв’язати нерівність

$$F\ x\ \vee 0,$$

де $F(x)$ –деяка елементарна функція. Знайдемо область визначення функції $F(x)$; потім знайдемо всі її корені. Корені функції $F(x)$ поділяють її область визначення на кілька проміжків, на кожному з яких, за доведеною теоремою, $F(x)$ зберігає знак. Далі з'ясуємо, який знак має $F(x)$ на кожному з проміжків знакосталості. Для цього досить з'ясувати, який знак має функція $F(x)$ в одній якій-небудь точці кожного з цих проміжків. Усі проміжки, на яких значення функції $F(x)$ додатні, утворюють множину всіх розв'язків нерівності $F(x) > 0$, а всі проміжки, на яких значення функції $F(x)$ від'ємні, утворюють множину розв'язків нерівності $F(x) < 0$.

Цей метод можна застосовувати для розв'язування будь-якої нерівності $F(x) \vee 0$, якщо тільки функція $F(x)$ неперервна на всій області визначення і якщо можна визначити її корені [2, с. 156].

Розглянемо застосування загального методу на прикладі раціональної нерівності:

Приклад. Розв'язати нерівність:

$$x^5 \geq \frac{133x-78}{133-78x}.$$

Розв'язання.

Перепишемо дану нерівність в такому вигляді:

$$x^5 - \frac{133x-78}{133-78x} \geq 0.$$

Позначимо $F(x) = x^5 - \frac{133x-78}{133-78x}$, тоді початкова нерівність набуде вигляду

$$F(x) \geq 0.$$

1) Знаходимо $D(f): x \neq \frac{133}{78}$, тобто

$$x \in \left(-\infty; \frac{133}{78}\right) \cup \left(\frac{133}{78}; +\infty\right).$$

2) Визначаємо корені функції $F(x)$:

$$x^5 - \frac{133x-78}{133-78x} = 0 \iff 133x^5 - 78x^6 - 133x + 78 = 0,$$

звідки

$$78x^6 - 133x^5 + 133x - 78 = 0.$$

Очевидні корені рівняння $x = \pm 1$. Тоді перепишемо дане рівняння $78x^6 - 133x^5 + 133x - 78 = 0$ у вигляді

$$(x+1)(x-1)(78x^4 - 133x^3 + 78x^2 - 133x + 78) = 0 \iff$$

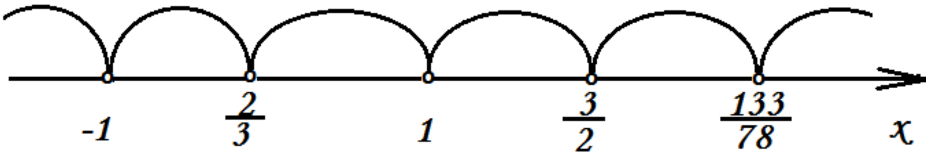
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x+1=0, \\ x-1=0, \\ 78x^4-133x^3+78x^2-133x+78=0, \end{matrix}$$

Звідки $x_1=-1, x_2=1$.

Третє рівняння останньої сукупності – зворотне рівняння парного степеня. Його коренями $x_3=\frac{3}{2}, x_4=\frac{2}{3}, x_{5,6}$ – комплексні.

3) Таким чином, дійсні корені функції $F\ \ x$ є множина $X=\ -1;\ \frac{2}{3};1;\ \frac{3}{2}$. Вони

Ділять її $D\ \ f$ на шість інтервалів знакосталості (мал.)



4) Визначаємо знак $F\ \ x$ на кожному із отриманих інтервалів:

а) $-\infty<x<-1$: $F\ \ -2\ \ =-32-\frac{-266-78}{133+156}<0$, тобто $F\ \ x\ \ <0$;

б) $-1<x<\frac{2}{3}$: $F\ \ 0\ \ =-\frac{-78}{133}>0$, тобто $F\ \ x\ \ >0$;

в) $\frac{2}{3}<x<1$: $F\ \ \frac{3}{4}\ \ =\ \ \frac{3}{4}\ ^{5}-\frac{133\cdot\frac{3}{4}-78}{133-78\cdot\frac{3}{4}}<0$, тобто $F\ \ x\ \ <0$;

г) $1<x<\frac{3}{2}$: $F\ \ 1{,}2\ \ =\ \ 1{,}2\ ^{5}-\frac{133\cdot\ 1{,}2\ -78}{133-78\cdot\ 1{,}2}>0$, тобто $F\ \ x\ \ >0$;

д) $\frac{3}{2}<x<\frac{133}{78}$: $F\ \ 1{,}6\ \ =\ \ 1{,}6\ ^{5}-\frac{133\cdot\ 1{,}6\ -78}{133-78\cdot\ 1{,}6}<0$, тобто $F\ \ x\ \ <0$;

е) $\frac{133}{78}<x<+\infty$: $F\ \ 2\ \ =2^5-\frac{133\cdot\ 2\ -78}{133-78\cdot\ 2}>0$, тобто $F\ \ x\ \ >0$;

Отже, розв’язком нерівності $F\ \ x\ \ \geq 0$, еквівалентної вихідній, будуть всі ті інтервали, на яких $F\ \ x\ \ >0$, і ті значення x, при яких $F\ \ x\ \ =0$, оскільки нерівність нестрога.

Відповідь: $x\in\ \ -1;\ \frac{2}{3}\ \ \cup\ \ 1;\frac{3}{2}\ \ \cup\ \ \frac{133}{78};\ +\infty\ \ .$

Даний метод можна застосовувати для розв’язування ірраціональних, показникових, логарифмічних, тригонометричних та змішаних нерівностей, в яких розв’язування відповідного рівняння є менш громіздким, ніж розв’язування нерівності.

Література

1. Завало С.Т. Рівняння і нерівності / Завало С.Т. – К. : Видавництво «Радянська школа», 1973. – 384 с.

2. Шарова Л.И. Уравнения и неравенства : пособие для подготовительных отделений / Шарова Л.И. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1981. – 280 с.