Степанчук Юлія,
студентка IV курсу, напрям підготовки «Математика та».
Науковий керівник – ***Чемерис О. А.****,*
кандидат педагогічних наук, доцент

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ НЕЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ ЛОБАЧЕВСЬКОГО

Геометрія може застосовуватись не лише до простору, в якому ми живемо, а й до інших просторів, що виникають в математичних і фізичних теоріях. Геометрії цих просторів є різними, як евклідовими, так і неевклідовими. Таким чином, необхідність побудови багатьох різних геометрій пов'язана виключно зі складною природою оточуючого нас світу.

Проективна геометрія є найбільш зручним вихідним пунктом для пояснення сутності не лише геометрії Лобачевського, а й інших геометричних систем [1]. Саме за допомогою методів проективної геометрії можна описати дев'ять відомих науці неевклідових геометрій площини і показати можливість їх використання в фізиці.

У процесі викладання неевклідової геометрії Лобачевського та вивчення інших неевклідових геометрій слід використовувати порівняльний аналіз для тверджень параболічної геометрії Евкліда, гіперболічної геометрії Лобачевського, сферичної геометрії, еліптичної геометрії або геометрії Рімана, активізуючи відомі студентам факти, та виявляти спільні або відмінні їх ознаки. Найбільш ефективними методами навчання неевклідових геометрій є пояснювально-ілюстративний метод та евристична бесіда. Саме під час евристичної бесіди студенти порівнюють твердження неевклідових геометрій з їх аналогами з евклідової геометрії.

Прямі, трикутники, чотирикутники, криві та інші фігури на гіперболічній площині мають специфічні властивості. Наприклад, якщо на евклідовій площині розрізняють два види прямих (прямі, що перетинаються, та паралельні прямі), то на площині Лобачевського існують три види прямих, а саме: прямі, що перетинаються, або збіжні прямі – це пучок прямих з власною вершиною, або еліптичний пучок; паралельні прямі – це пучок прямих з невласною вершиною, або параболічний пучок та розбіжні прямі – це пучок з ідеальною вершиною, або гіперболічний пучок.

Паралельні прямі на площині Лобачевського мають багато властивостей, відмінних від властивостей паралельних прямих на евклідовій площині, для них є важливим напрямок паралельності. Так, наприклад, відстань між паралельними прямими на евклідовій площині є сталою величиною, а на гіперболічній площині відстань між паралельними прямими необмежено зменшується в напрямку кута паралельності і може стати меншою за наперед заданий, як завгодно малий, відрізок, тобто в напрямку кута паралельності паралельні прямі асимптотично зближуються; в протилежному напрямку відстань необмежено зростає і може стати більшою за наперед заданий, як завгодно великий, відрізок, тобто в напрямку, протилежному до кута паралельності, паралельні прямі асимптотично розбігаються.

На істотну відмінність геометрії Лобачевського від евклідової геометрії вказує і наявність функції Лобачевського, яка пов'язує довжини відрізків із градусною мірою кутів. Такої функції немає на евклідовій площині. В евклідовій геометрії вводиться окремо і еталон довжини, й одиниця міри кутів. У геометрії Лобачевського в цьому немає ніякої потреби, оскільки тут за одиницю довжини можна взяти відрізок, який називається стрілкою кута паралельності, що відповідає певному куту паралельності [2].

Розглядаючи питання про суму внутрішніх кутів трикутників на евклідовій площині слід відмітити, що вона є сталою величиною і дорівнює 180°, або 2π радіан. На відміну від евклідової геометрії, в геометрії Лобачевського сума внутрішніх кутів трикутників є змінною величиною, що залежить від форми і розмірів трикутника, але завжди є меншою 180°, або 2π радіан.

Після ознайомлення з властивостями трикутників слід дати означення рівних трикутників та розглянути ознаки рівності трикутників. Особливу увагу потрібно звернути на той факт, що в геометрії Лобачевського мають місце чотири ознаки рівності трикутників. Четверта ознака рівності трикутників полягає в тому, що якщо три кути одного трикутника відповідно дорівнюють трьом кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні. На евклідовій площині трикутники з відповідними рівними кутами є подібними, а на гіперболічній площині є рівними. Таким чином, ще однією цікавою особливістю гіперболічної геометрії є відсутність подібних трикутників, подібних фігур і взагалі перетворень подібності.

Ще однією відмінністю гіперболічної геометрії від геометрії Евкліда є той факт, що на площині Лобачевського не навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Це можна зробити лише у випадку, коли медіатриси (медіатрисою трикутника називається пряма, що лежить у площині трикутника, проходить через середину однієї з його сторін і перпендикулярна до цієї сторони), або серединні перпендикуляри до сторін трикутника, перетинаються, оскільки в цьому випадку точка їх перетину рівновіддалена від вершин трикутника. Якщо дві медіатриси трикутника є розбіжними прямими, то і третя медіатриса попарно розбіжна з ними, і в цьому випадку навколо трикутника можна описати еквідистанту. Якщо дві медіатриси трикутника є паралельними прямими, то і третя медіатриса паралельна до них і в тому ж самому напрямі. У цьому випадку навколо трикутника можна описати граничну лінію, або орицикл [3].

Для доведення несуперечливості геометрії Лобачевського доцільно розглядати декілька її моделей. Першою є інтерпретація італійського вченого Е. Бельтрамі. В евклідовому просторі існує поверхня від'ємної кривини, що називається псевдосферою, на якій в системі геодезичних ліній виконується (локально) лише планіметрія Лобачевського. Далі знайомляться з інтерпретацію німецького математика Ф. Клейна, який запропонував оригінальне тлумачення геометрії Лобачевського на звичайних прикладах евклідової геометрії і не тільки для всієї планіметрії, але і для стереометрії. Праця Клейна виявилася величним тріумфом у справі остаточного визнання геометрії Лобачевського як логічно стрункої геометричної системи. І на питання про реальність геометрії Лобачевського, вже без всіляких коливань можна дати позитивну відповідь, а саме: геометрія Лобачевського реальна настільки, наскільки реальна евклідова геометрія, а та, в свою чергу, несуперечлива настільки, наскільки несуперечлива арифметика дійсних чисел; несуперечливість останньої доведена багатовіковою практикою людського суспільства в найширшому розумінні цього слова. Також доречно розглянути декілька моделей аксіоматики планіметрії Лобачевського, які запропонував відомий французький математик і філософ А. Пуанкаре [4]. В результаті в рамках евклідової геометрії на її відомих прикладах можна побудувати всю гіперболічну геометрію.

Для розуміння геометрії Всесвіту важливо використовувати наукові результати, які були отримані вченими-фізиками, астрономами. Відкриття теорії відносності А. Ейнштейном, розширення обсягу знань про Всесвіт приводять нас до висновку, що Всесвіт в цілому не можна розглядати як незмінну систему. Суперечливому та змінному Всесвіту притаманна зміна метрики простору і часу. Важливі результати були отримані А.А. Фрідманом, який показав, що при певних умовах геометрія Всесвіту має від'ємну кривину, тобто співпадає з геометрією Лобачевського. Виходячи із загальної теорії відносності, в 1922 році Фрідман зробив висновок, що Всесвіт повинен розширюватися з плином часу.

Фрідманова модель Всесвіту, яка була отримана теоретичним шляхом, була блискуче підтверджена експериментально американським астрономом Едвіном Габблом. Габбл, діючи абсолютно незалежно від Фрідмана, виявив подільність зовнішньої частини туманностей на окремі зорі (цефеїди). Ейнштейн оцінив отримані Габблом результати як підтвердження теоретичних положень Фрідмана. У 1929 р., співставивши променеві швидкості галактик з відстанями до них, Едвін Габбл знайшов, що між цими величинами існує лінійна залежність (один з найбільш важливих космологічних законів – закон Габбла), і визначив числове значення коефіцієнта цієї залежності (стала Габбла). Ці відкриття Е. Габбла стали спостережною основою теорії розширення Всесвіту.

Сучасний рівень науки дозволяє зробити висновок, що реальний простір Всесвіту є викривленим простором змінної кривини. Отже, геометрія Всесвіту не може бути ні геометрією Евкліда, ні геометрією Лобачевського, оскільки евклідовий простір і простір Лобачевського мають відповідно нульову і сталу від'ємну кривину. Оскільки кривина евклідового простору дорівнює нулю, тоді можна вважати, що простір Лобачевського, який має сталу від'ємну кривину, ближчий до геометрії Всесвіту.

Таким чином, основними методичними особливостями при викладанні неевклідової геометрії Лобачевського є: 1) використання порівняльного аналізу; 2) застосування моделюючого підходу; 3) виявлення міжпредметних зв'язків з фізикою, астрономією, теорією функцій комплексної змінної, з теорією чисел тощо.

Вивчення властивостей геометричних фігур в неевклідових геометріях розширюють уявлення студентів про сучасну картину Всесвіту та стимулюють їх власний пошук нових геометричних ідей і теорій.

Література

1. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского / П. А. Широков. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 80 с.

2. Боровик В. Н. Курс вищої геометрії: навчальний посібник / В.Н. Боровик,

В. П. Яковець. – Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.

3. Шаповалова Н. В. Криві на площині Лобачевського : навч.-метод. посіб. для студ. матем. спец. ВНЗ / Н. В. Шаповалова, Л. Л. Панченко. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – 32 с.

4. Трайнин Я. Л. Основания геометрии / Я. Л. Трайнин. – М. : Учпедгиз, 1961. – 326 с.