Тирановець Вікторія,
магістрантка, спеціальність «Математика».
Науковий керівник – ***Сверчевська І. А.****,*
кандидат педагогічних наук, доцент

ГЕОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ В АЛГЕБРІ

Розв’язування алгебраїчних задач за допомогою геометрії, дозволяє не тільки показати єдність геометрії та алгебри, але і озброїти студентів, що вчаться ефективним прийомам пошуку розв’язання завдань.

Розглянемо геометричні розв’язання алгебраїчних задач.

1. Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y+z=60 \\ x^2+y^2=z^2 \\ \frac{xy}{z}=12 \end{cases}$ [1, с. 9].

Розв’язання.

1) Якщо $x>0, y>0$ і $z>0$, то існує трикутник ABC з прямим кутом C, у якого x і y – катети, а z – гіпотенуза. (Рис. 1).

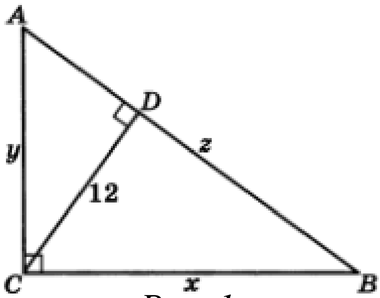

Рис. 1.

Периметр цього трикутника дорівнює 60, а довжина його висоти, проведеної з вершини прямого кута, дорівнює 12. З першого рівняння отримуємо, що $(x+y)^2=(60-z)^2$, а з другого і третього рівнянь: $(x+y)^2=z^2+24z$. Прирівнявши перші частини останніх рівнянь, відмітимо, що $144z=60^2$, тобто $z=(5\cdot 12)^2:12^2=25$.

Далі наша система дозволяє отримати іншу:

$$\begin{cases} x+y=35 \\ xy=300. \end{cases}$$

У цій системі одне невідоме дорівнює 15, а інше – 20. Таким чином система має розв’язки: (15; 20; 25) і (20; 15; 25).

2) В умові системи не сказано, що x, y і z – додатні числа. Із третього рівняння випливає, що два із трьох невідомих можуть бути від’ємними. Але при розв’язуванні ми переконуємося, що $z>0$. Отже, можуть бути лише $x<0$ і $y<0$. Але це неможливо, оскільки $x+y=35$.

2. Обчисліть $ctg\ \frac{1}{2} arccos\frac{5}{13}$ [1, с. 47].

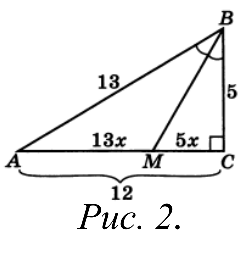

Рис. 2.

Розв’язання. Використовуємо поняття косинуса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника, теорему Піфагора і властивість бісектриси кута трикутника.

На рис. 2 зображено трикутник ABC, в якому $\angle ACB = 90°$, $BC = 5$, $AB = 13$ і BM – бісектриса $\angle ABC$.

Тоді $MC = 5x$, $AM = 13x$ і $AC = 12$, тобто $x = \frac{2}{3}$.

$ctg\left(\frac{1}{2} arccos \frac{5}{13}\right) = \frac{BC}{MC} = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$.

3. При якому значенні x функція $f(x) = \sqrt{1+x^2-x} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ приймає своє найменше значення? [1, с. 55]

Розв'язання. Використавши теорему косинусів, зобразимо два трикутники зі спільною стороною x (рис. 3). Значення досліджуваної функції дорівнює АВ. Знаходимо площі трикутників *ABC*, *ACD* і *BCD*:

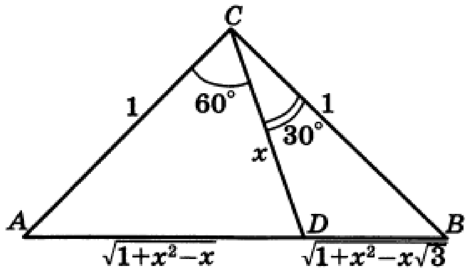

Рис. 3.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$, $S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x \cdot \sin 60° = \frac{x\sqrt{3}}{4}$, $S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x \cdot \sin 30° = \frac{x}{4}$.

Отже, $\frac{1}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{4} + \frac{x}{4}$, тобто $x = \sqrt{3} - 1$.

4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 5x\sqrt{2} + 25} + \sqrt{x^2 - 12x\sqrt{2} + 144} = 13$ [2, с. 189].

Розв'язання. Геометрична інтерпретація рівняння, із застосуванням теореми косинусів, представлена на рис. 4.

Із ΔABC за теоремою Піфагора *AB* = 13.

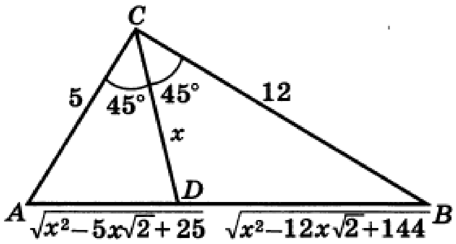

Рис. 4.

$D \in AB$, оскільки $\min f(x) = \min(AD + DB) = AB$, де

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x\sqrt{2} + 25} + \sqrt{x^2 - 12x\sqrt{2} + 144}.$$

Якщо рівняння має корені, то вони повинні бути додатними (при $x \leq 0$ значення лівої частини рівняння не менші 17).

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$,

$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x \cdot \sin 45° = \frac{5x\sqrt{2}}{4}$,

$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x \cdot \sin 45° = 3x\sqrt{2}$.

Отже, $30 = \frac{5x\sqrt{2}}{4} + 3x\sqrt{2}$ і $x = \frac{60\sqrt{2}}{17}$.

Отже, при розв'язуванні таких задач зручно використовувати геометричні прийоми, оскільки розв'язання за формулами передбачає громіздкі обчислення. Проаналізувавши взаємопроникнення геометричних методів і образів в алгебру, можна зробити висновок, що геометрична інтерпретація алгебраїчних залежностей значно полегшує розв'язування алгебраїчних задач.

Література

1. Генкин Г. З. Геометрические решения негеометрических задач : кн. для учителей / Г. З. Генкин. – М. : Просвещение, 2007. – 79 с.
2. Дідківська Т. В., Сверчевська І. А. Геометричне розв'язання визначних історичних задач / Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2015), м. Черкаси, 4-5 червня 2015 р. – Черкаси : ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. – С. 189–190.