ОЗНАЧЕННЯ ПОНЯТЬ У РІЗНИХ РОЗДІЛАХ ГЕОМЕТРІЇ: ПРАКТИЧНИЙ АСПЕКТ

Чемерис Ольга Анатоліївна

доцент кафедри алгебри та геометрії, кандидат педагогічних наук

Житомирський державний університет імені Івана Франка

Україна, місто Житомир

У різних розділах геометрії одне й те саме поняття означається по-різному, оскільки відрізняються основні методи цих розділів (координатний – в аналітичній геометрії, центрального проектування – в проективній, диференціального та інтегрального числення – в диференціальній геометрії тощо) [1]. Наприклад, означення трикутника в шкільній планіметрії таке: це фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки [2, с. 10]. У проективній геометрії ці точки з формулювання попарно належать прямим [3, с. 167]. Щодо означення чотирикутника, то маємо ще більше відмінностей у трактуванні поняття: це плоска фігура, яка складається з чотирьох точок, жодні три з яких не належать одній прямій, і шести прямих, які належать цим точкам попарно [3, с. 168].

Але розбіжність означення одного й того самого поняття у певних розділах геометрії накладає свої способи описання його характеристик та розв'язування практичних задач.

Розглянемо класичну задачу диференціальної геометрії щодо відшукання омбілічних точок. У диференціальній геометрії *точка називається омбілічною, якщо в ній індикатриса Дюпена є колом* [4, с. 134]. Звідси випливає І спосіб знаходження омбілічних точок, а саме, через дослідження квадратного рівняння деякої центральної кривої другого порядку:

$$\frac{L}{E}x^2+\frac{M}{\sqrt{EG}}xy+\frac{N}{G}y^2=\pm 1 \text{ [4, с. 132].}$$

ІІ спосіб знаходження омбілічних точок полягає в тому, що в них кривина $k_n=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$ не залежить від вибору напрямів $du:dv$, тому коефіцієнти першої та другої квадратичних форм пропорційні: $\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}$ [4, с. 134-135].

У курсі аналітичної геометрії з омбілічними точками ми зустрічаємось при вивченні питання про колові перерізи поверхонь другого порядку. Колові перерізи мають: 1) усі поверхні обертання; 2) поверхні другого порядку, рівняння яких можна подати в такому вигляді: $A(x^2+y^2+z^2)+\alpha\beta+\gamma=0$, де α,β,γ – лінійні вирази відносно x,y,z (мають дві серії колових перерізів) [5, с. 229].

Коли поверхня другого порядку замкнена, то серед площин, паралельних площинам колових перерізів, є такі, що зовсім її не перетинають, а також такі, що дотикаються до неї, або, як кажуть, перетинають її по колах нульового радіуса. Точки дотику цих площин з поверхнею називають точками закруглення, або омбілічними точками поверхні. Омбілічні точки поверхні обертання є точками перетину поверхні обертання з віссю обертання [5, с. 230].

Задача 5 з посібника [5, с. 232] про знаходження омбілічних точок еліпсоїда була розв'язана раніше [6, с. 161-165]. Опишемо розв'язання подібної задачі для знаходження точок заокруглення для еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = z$.

Розв'язання.

Перейдемо в рівнянні еліптичного параболоїда до параметричної форми. Можна прийняти за параметри координати x та y, тоді в координатно-параметричній формі рівняння поверхні набудуть вигляду:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{2} \end{cases}.$$

Обчислимо частинні похідні першого порядку для знаходження коефіцієнтів першої квадратичної форми:

$$\begin{cases} x_u = 1 \\ y_u = 0 \\ z_u = \frac{u}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_v = 0 \\ y_v = 1 \\ z_v = v \end{cases}.$$

Отже, $E = \overrightarrow{r_u}^2 = 1 + \frac{u^2}{4}$, $F = \overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v} = \frac{uv}{2}$, $G = \overrightarrow{r_v}^2 = 1 + v^2$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{cases} x_{uu} = 0 \\ y_{uu} = 0 \\ z_{uu} = \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_{uv} = 0 \\ y_{uv} = 0 \\ z_{uv} = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_{vv} = 0 \\ y_{vv} = 0 \\ z_{vv} = 1 \end{cases}.$$

Тоді коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$L = \frac{1}{\Delta}(\overrightarrow{r_{uu}}, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}),\ M = \frac{1}{\Delta}(\overrightarrow{r_{uv}}, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}),\ N = \frac{1}{\Delta}(\overrightarrow{r_{vv}}, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}),\ \text{де } \Delta = E * G - F^2.$$

Тепер: $L = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{u}{2} \\ 0 & 1 & v \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta}$, $M = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{u}{2} \\ 0 & 1 & v \end{vmatrix} = 0$, $N = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{u}{2} \\ 0 & 1 & v \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}$.

Підставимо знайдені вирази для коефіцієнтів квадратичних форм в умову омбілічних точок $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$: $\frac{\frac{1}{2\Delta}}{1+\frac{u^2}{4}} = \frac{0}{\frac{uv}{2}} = \frac{\frac{1}{\Delta}}{1+v^2}$. Розв'язавши дану систему, маємо $u = 0$, а $v = \pm 1$. Остаточно, маємо $x = 0$, $y = \pm 1$, $z = \frac{1}{2}$, або висновок: заданий еліптичний параболоїд має дві омбілічні точки: $\left(0, -1, \frac{1}{2}\right)$ та $\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$.

В аналітичній геометрії ця задача на знаходження омбілічних точок для поверхонь другого порядку розв'язується швидше. Зробимо наступні перетворення з рівнянням еліптичного параболоїда: $\frac{x^2+y^2+z^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}-z=0$, $\frac{x^2+y^2+z^2}{4}+\left(\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right)\left(\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)-z=0$.

Отже, площини $\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=u$ $(u=const)$ та $\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=v$ $(v=const)$ перетинають еліптичний параболоїд по колах. Взагалі дана поверхня має дві точки заокруглення [5, с. 231]. Знайдемо їх як точки дотику дотичних площин, паралельних заданим. З рівняння поверхні вектор нормалі дотичної площини має координати: $\left(\overrightarrow{F_x, F_y, F_z}\right)=\left(\overrightarrow{\frac{x}{2}, y, -1}\right)$.

Вектори нормалей площин, що є коловими перерізами, мають координати $\left(\overrightarrow{0, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}}\right)$. Площини – паралельні, тому вектори нормалей колінеарні, тобто їх координати пропорційні:

$$\frac{\frac{x}{2}}{0}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{-1}{\pm\frac{1}{2}}.$$

Тоді маємо $x=0$, $y=\pm1$. Підставимо це в рівняння поверхні і матимемо дві омбілічні точки: $\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$ та $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

Уміння студентом старших курсів означати поняття з боку різних розділів однієї науки чи певних дисциплін є важливим компонентом фахової підготовки і свідчить про його компетентність.

Література:

1. Явище – поняття – визначення – термін [Електронний ресурс]. – Режим доступу до сторінки: http://stud.com.ua/30973/pravo/yavische_ponyattya_viznachennya_termin.
2. Бурда М.І. Геометрія: підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів / Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. - К. : Зодіак-ЕКО, 2007. - 208 с.
3. Боровик В.Н. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник / [В.Н. Боровик, В.П. Яковець] – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.
4. Кованцов М.І. Диференціальна геометрія / Микола Іванович Кованцов. – К.: Вища школа, 1973. – 276 с.
5. Аналітична геометрія / [Білоусова В. П., Ільїн І. Г., Сергунова О. П., Котлова В. М.]. – К.: Вища школа, 1973. – 328 с.
6. Чемерис О.А. Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів / за ред. доц. О.М. Королюк. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка. – Вип. 9. – С. 161-165.