

*Столярчук Тетяна,  
студентка V курсу, спеціальність «Математика».  
Науковий керівник – Прус А.В.,  
кандидат педагогічних наук, доцент*

## **АНАЛІТИЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ**

Задачі з параметрами – це задачі, які мають високу діагностичну цінність. Для вирішення подібних завдань не потрібно володіти знаннями, що виходять за рамки шкільної програми. Але незвичність формулювання зазвичай змушує задуматися учнів, які не мають досвіду вирішення подібних завдань.

Дослідженням задач із параметрами присвячено багато наукових, науково-методичних праць. Зокрема, це роботи таких науковців: О.М. Гольдмана, Г.В. Дорофєєва, В.І. Голубєва, П.Ф. Севрюкова,

У нашій статті ми зосередимо увагу на розв'язуванні логарифмічних та показникових рівнянь аналітичним методом. Цей метод найбільш поширений. Його використовують досить часто під час розв'язування завдань без параметрів. Отже, мета статті – це показати як використовується метод заміни у процесі аналітичного розв'язування логарифмічних рівнянь з параметрами. Аналітичний метод розв'язування для рівнянь та нерівностей з параметрами ґрунтується на використанні властивостей логарифмічних функцій.

Розглянемо прийом заміни. Суть даного прийому полягає у заміні однієї змінної чи виразу, іншою змінною, у випадку, якщо це спрощує розв'язування завдання чи зводить до розв'язку вже відомого нам типу вправ.

**Приклад 1.** Для всіх значень параметра  $a$  розв'язати рівняння

$$3 \log_{a^2 x} x + 0,5 \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2.$$

**Розв'язання.** 1. Знайдемо область визначення параметра та змінної

$$a > 0, x > 0, x^2 \neq a, x \neq \frac{1}{a^2}.$$

2. Зведемо всі логарифми до основи  $x$ :

$$\frac{3 \log_x x}{\log_x a^2 x} + \frac{0,5 \log_x x}{\log_x \frac{x}{\sqrt{a}}} = 2, \quad \frac{3}{1 + 2 \log_x a} + \frac{0,5}{1 - 0,5 \log_x a} = 2$$

3. Введемо заміну:  $\log_x a = t$ .

$$\frac{3}{1 + 2t} + \frac{1}{2 - t} = 2; \quad 4t^2 - 7t + 3 = 0; \quad t_1 = 1 \text{ або } t_2 = \frac{3}{4}.$$

Отримаємо:

$$1) \log_x a = 1, \quad \begin{cases} a = x, \\ a \neq 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases} \quad 2) \log_x a = \frac{3}{4}, \log_x x = \frac{4}{3}, \quad \begin{cases} x = a^{\frac{4}{3}}, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

**Відповідь:** якщо  $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$ , то розв'язків немає;

якщо  $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ , то  $x = a$  або  $x = a^{\frac{4}{3}}$ .

**Приклад 2.** Для всіх значень параметра  $a$  розв'язати рівняння

$$2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2 x} a = 0.$$

**Розв'язання. 1.** Знайдемо область визначення параметра та змінної

$$\begin{cases} x > 0, \\ ax > 0, \\ a^2x > 0, \\ x \neq 1, \\ ax \neq 1, \\ a^2x \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ a > 0, \\ x \neq 1, \\ ax \neq 1, \\ a^2x \neq 1. \end{cases}$$

2. Використаємо властивості логарифмічної функції:

$$2 \frac{\log_a a}{\log_a x} + \frac{\log_a a}{\log_a ax} + 3 \frac{\log_a a}{\log_a a^2x} = 0; \quad 2 \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a ax} + 3 \frac{1}{\log_a a^2 + \log_a x} = 0,$$

$$2 \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a a + \log_a x} + 3 \frac{1}{\log_a a^2 + \log_a x} = 0,$$

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{1 + \log_a x} + \frac{3}{2 + \log_a x} = 0,$$

3. Введемо заміну:  $\log_a x = t$  та отримаємо рівняння

$$\frac{2}{t} + \frac{1}{1+t} + \frac{3}{2+t} = 0; \quad \frac{2(1+t)(2+t) + t(2+t) + 3t(1+t)}{t(1+t)(2+t)} = 0,$$

Перейдемо до системи

$$\begin{cases} 4 + 6t + 2t^2 + 2t + t^2 + 3t + 3t^2 = 0, \\ t(1+t)(2+t) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t^2 + 11t + 4 = 0, \\ t \neq 0, t \neq -1, t \neq -2 \end{cases}$$

Знайдемо розв'язки першого рівняння

$$t_1 = -\frac{4}{3} \text{ або } t_2 = -\frac{1}{2}.$$

4. Повернемося до заміни

$$\log_a x = -\frac{4}{3} \text{ або } \log_a x = -\frac{1}{2}.$$

Узгодимо знайдені розв'язки з областю допустимих значень та запишемо відповідь.

**Відповідь.** Якщо  $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ , то  $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$ ,  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ; якщо  $a = 1$ , то  $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ .

Подальшою перспективою нашої роботи є розв'язання логарифмічних завдань з параметрами, а саме нерівностей та систем рівнянь та нерівностей графічним методом.

#### *Література*

1. Локоть В.В. Задачі з параметрами. Показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы. – М. : АРКТИ, 2004 – 64 с.
2. Прус А.В. Швець В.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики : навч.-метод. посібник. – Житомир : Вид-во «Рута», 2016 – 468 с.