Кучерук Альона,
студентка V курсу, спеціальність «Математика».
Науковий керівник – ***Прус А. В.,***
кандидат педагогічних наук, доцент

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ

Вміти розв'язувати завдання з параметрами – це свідчення високої математичної компетентності старшокласників. Задачі з параметрами зустрічаються майже кожного року серед завдань зовнішнього незалежного оцінювання. Наприклад, на ЗНО у 2011 році було запропоноване таке завдання: «Знайдіть найменше значення a, при якому має розв'язок рівняння $\frac{1}{2}\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) = 4 - 3a - 2a^2$». На ЗНО у 2014 році для розв'язування було дано таке завдання: «Знайдіть найбільше значення параметра a, при якому система рівнянь $\begin{cases}(2a-5)\sin x + \cos x = 2\\(a-2)\sin x + (2a-5)\cos x = a-1\end{cases}$ має безліч розв'язків».

У програмах з математики для неспеціалізованих шкіл даному виду завдань відводиться незначне місце, тому завдання з параметрами є чи не найскладнішими для учнів.

Мета статті – виділити основні типи тригонометричних рівнянь з параметрами у діючих підручниках з математики.

Мною були проаналізовані діючі підручники з алгебри для 10-х класів [1, 2, 3].

У цих підручниках підручниках не дається чіткого означення параметра, а всі наведені завдання є однотипними. Виокремимо такі типи завдань:

1. *Розв'язати задачу з параметром;*
2. *Знайти значення параметра, при ярих виконується рівність, яке не має коренів.*
3. *Знайти кількість коренів рівняння в залежності від параметра;*

4. Знайти усі значення параметра, при яких корені рівняння задовольняють певну умову;

5. Знайти усі значення параметра, при яких рівняння (нерівність, система) має один корінь (два корені, безліч коренів, не має коренів).

Розглянемо розв'язання одного із найбільш поширеного типу завдань.

Приклад 1 (Є. П. Нелін, проф. рівень, 10 кл). Розв'яжіть рівняння

$tg2x = actgx$ (1)

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x \neq \pi m, m \in Z, \end{cases}$ тоді $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \\ x \neq \pi m, m \in Z. \end{cases}$

Зведемо тригонометричні функції до одного аргументу *x*, використовуючи формулу тангенса подвійного аргументу, а потім зведемо всі вирази до однієї функції *tgx,* використовуючи формулу $ctgx = \frac{1}{tgx}$. При використанні формул звузиться ОДЗ, і тому щоб не втратити корені заданого рівняння , ті значення, на які звужується ОДЗ $(x = \frac{\pi}{2} + \pi k)$, розглянемо окремо.

I. При $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$ з рівняння (1) одержуємо: $tg(\pi + 2\pi k) = actg(\frac{\pi}{2} + \pi k)$, тобто $0 = a \times 0$ – рівність, правильну при будь-яких значеннях *a*. Отже, при всіх значеннях параметра *a* задане рівняння має корені $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

II. При $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ зводимо тригонометричні вирази до однієї функції та виконавши рівносильні перетворення отримаємо рівняння (2): $\frac{2tgx}{1-tg^2x} = \frac{a}{tgx}$, яке на ОДЗ рівносильне рівнянню $2tg^2x = a - atg^2x$.

Звідси $(2 + a)tg^2x = a$ (3)

1) Якщо $2 + a = 0$, тобто $a = -2$, то одержуємо рівняння

$0 \times tg^2x = -2$.

2) Якщо $2 + a \neq 0$, тобто $a \neq -2$, то одержуємо рівняння

$tg^2x = \frac{a}{a+2}$ (4)

Щоб розв'язати дане рівняння, потрібно знати знак виразу, який стоїть у правій частині, оскільки tg^2x може бути від'ємном. Розглянемо для правої частини три випадки: вона менша від нуля, дорівнює нулю, більша за нуль.

а) Якщо $\frac{a}{a+2} < 0$, то коренів немає. Розв'яжемо дану нерівність методом інтервалів (рис. 1), одержуємо $-2 < a < 0$.

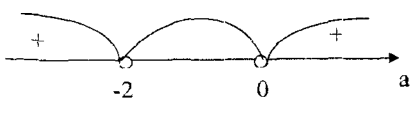

Рис. 1.

Отже, при $-2 < a < 0$ коренів не має.

б) Якщо $\frac{a}{a+2} = 0$, (тобто $a=0$), одержуємо рівність $tgx = 0$, яке має корені $x = \pi k, k \in Z$. Але ці корені не входять до ОДЗ заданого рівняння. Отже, і при $a = 0$ коренів немає.

в) Якщо $\frac{a}{a+2} > 0$ (тобто $a < -2$ або $a > 0$), то з рівняння (4) одержуємо $tgx = \pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}$. Звідси $x = arctg\left(\pm\frac{a}{a+2}\right) + \pi l, l \in Z$.

З'ясуємо, при яких значеннях a одержані корені рівняння (4) не входять до ОДЗ. Для цього достатньо в рівняння (4) замість аргумента x підставити «заборонені» значення. Ураховуючи, що функції, які входять до запису заданого рівняння (1), мають спільний період $T = \pi$ ($tg2x$ має період $T_1 = \frac{\pi}{2}$, а $ctgx$ має період $T_2 = \pi$), достатньо підставити ці значення на одному періоді, наприклад на проміжку $[0;\pi]$. У цьому проміжку до ОДЗ не входять такі значення: $0; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \pi$. При $x = 0$ або $x = \pi$ з рівняння (4) одержуємо $\frac{a}{a+2} = 0$, тобто $a = 0$. Випадок $a = 0$ ми вже дослідили (коренів немає). При $x = \frac{\pi}{4}$ або $x = \frac{3\pi}{4}$ з рівняння (4) одержуємо $\frac{a}{a+2} = 1$. Але при жодному значенню a ця рівність не може виконуватись. Отже, при всіх значеннях $a < -2$ або $a > 0$ одержані розв'язки $x = arctg\left(\pm\frac{a}{a+2}\right) + \pi l, l \in Z$, входять до ОДЗ початкового рівняння.

Зобразимо одержанірозв'язки на вісь параметрів (рис. 2).

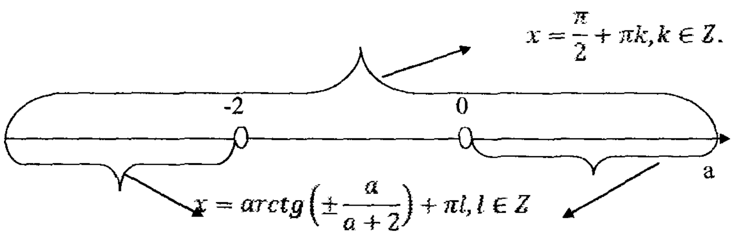

Рис. 2.

Відповідь. Якщо $-2 \le a \le 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; якщо $a < -2$ або $a > 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, x = arctg\left(\pm\frac{a}{a+2}\right) + \pi l, l \in Z$.

Розв'язування тригонометричних рівнянь з параметрами викликають великі труднощі в учнів. Адже їх розв'язування вимагає мати високий рівень знань з кожного розділу математики, зокрема з тригонометрії. Основною, на нашу думку, причиною труднощів є недостатня увага вчителів до розв'язування таких завдань на уроках математики.

Література

1. Мерзляк А. Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 кл. з поглибленим вивченням математики. – Х. : Гімназія, 2010. – 415 с.
2. Мерзляк А. Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академічний рівень. – Х. : Гімназія, 2011. – 352 с.
3. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: профільний рівень. – Х. : Гімназія, 2010. – 416 с.