УДК 519.6:517.958

Борис М. Ляшенко,
Олександр М. Кривонос

Власні значення двовимірного сингулярного оператора Шредінгера

Для дослідження математичних моделей теоретичної фізики, теорії катастроф щодо стійкості фізичних об'єктів розроблений метод розв'язування двовимірних спектральних задач. Доведено, що власні значення несингулярних задач на урізаній області означення з крайовими умовами на межі урізання, відповідно, першого та другого роду забезпечують двосторонню апроксимацію власних значень двовимірного сингулярного оператора Шредінгера.

Ключові слова: власне значення, оператор Шредінгера, сингулярність.

Boris N. Lyashenko,
Alexandr N. Kryvonos

Eigenvalues of a Schroedinger two-dimensional singular operator

The method of the solution of two-dimensional spectral tasks has been developed for research of mathematical models of theoretical physics, catastrophe theory concerning stability of physical objects. It has been proved, that the eigenvalues of nonsingular problems on the truncated area of definition with boundary conditions on border of truncation first and the second sort accordingly provide bilateral approximation of eigenvalues of a Schroedinger two-dimensional singular operator.

Key Words: eigenvalue, Schroedinger operator, singularity.

Математичні моделі теоретичної фізики [1], теорії катастроф щодо стійкості фізичних об'єктів [2] приводять до проблеми власних значень багатовимірних сингулярних операторів другого порядку

$$\Delta u(x,y)-(q(x,y)-\lambda r(x,y))u(x,y)=0, \qquad (1)$$

$$\lim_{(x,y)\to\Gamma} u(x,y)=0, \qquad (2)$$

де $r(x,y)>0$, а сама задача має особливість, що проявляється в необмеженості області означення Ω або в необмеженому зростанні потенціальної функції $q(x, y)$ на межі Γ цієї області.

Незважаючи на актуальність цієї проблеми, ефективних методів прямого дослідження таких задач ще не розроблено. Основним методом розв'язування подібних задач є відокремлення змінних з наступним зведенням до системи одновимірних сингулярних задач Штурма-Ліувілля [1, с.309]. Однак, якщо цей прийом вдається для найпростіших потенціалів, таких як гармонічний осцилятор [1, с.625, с.710], то для більш складних потенціалів, таких як $q(x,y)=x^2y+y^4+ax^2+by^2+cx+dy$ параболічної омбіліки теорії катастроф [2, с.243], даний підхід є проблематичним. Більш ефективним, на нашу думку, є зведення багатовимірної сингулярної задачі до задачі з виключеними сингулярностями та подальшим використанням вже відомих методів розв'язування несингулярних задач про власні значення.

Для розв'язування одновимірних сингулярних задач про власні значення досить ефективним є метод двосторонньої апроксимації власних значень сингулярних задач відповідними власними значеннями двох допоміжних несингулярних задач на урізаній області визначення [3]. Поширимо цей метод на власні значення двовимірного рівняння Шредінгера (1), (2).

Побудуємо область $\Omega^{(1)} \subset \Omega$, обмежену контуром $\Gamma^{(1)}$, обираючи її так, щоб всі сингулярності залишалися у вилученій області $\Omega \setminus \Omega^{(1)}$.

Теорема. Власні значення μ, ν задач

$$\Delta f(x,y)-(q(x,y)-\mu r(x,y))f(x,y)=0, \tag{3}$$

$$f(x,y)|_{\Gamma^{(1)}}=0; \tag{4}$$

$$\Delta g(x,y)-(q(x,y)-\nu r(x,y))g(x,y)=0, \tag{5}$$

$$g'(x,y)|_{\Gamma^{(1)}}=0 \tag{6}$$

забезпечують двосторонню апроксимацію відповідних власних значень λ задачі (1), (2) і рівномірно збігаються до них при $\Gamma^{(1)} \to \Gamma$, якщо $q(x,y)-\lambda r(x,y)>0$ в $\Omega \setminus \Omega^{(1)}$.

Доведення. Не втрачаючи загальності, припустимо, що область $\Omega^{(1)}$ має вигляд двосторонньої криволінійної трапеції

$$\Gamma^{(1)}=\{x=a,\ x=b,\ a\le x\le b,\ y=Y_d(x),\ y=Y_u(x),\ Y_d(x)>Y_u(x)\}.$$

Розіб'ємо область $\Omega^{(1)}$ на систему n криволінійних трапецій: $x_0=a$, $x_{k+1}=x_k+h$, $h=(b-a)/n$, $k=\overline{0,n-1}$, $y=Y_d(x)$, $y=Y_u(x)$, $Y_d(x)>Y_u(x)$, кожну з яких апроксимуємо вписаним ($y=d_k^{\circ}=min\{Y_u(x_k),Y_u(x_{k+1})\}$, $y=c_k^{\circ}=max\{Y_d(x_k),Y_d(x_{k+1})\}$) та описаним ($y=d_k^{\bullet}=max\{Y_u(x_k),Y_u(x_{k+1})\}$, $y=c_k^{\bullet}=min\{Y_d(x_k),Y_d(x_{k+1})\}$) прямокутниками.

Розглянемо задачу (1) з крайовими умовами

$$u(x_k,y)=\alpha(y)u_x'(x_k,y), \tag{7}$$

$$u(x_{k+1},y)=\beta(y)u_x'(x_{k+1},y), \tag{8}$$

$$u(x,c_k^{\circ})=\gamma(x)u_y'(x,c_k^{\circ}),\ u(x,c_k^{\bullet})=\gamma(x)u_y'(x,c_k^{\bullet}), \tag{9}$$

$$u(x,d_k^{\circ})=\delta(x)u_y'(x,d_k^{\circ}),\ u(x,d_k^{\bullet})=\delta(x)u_y'(x,d_k^{\bullet}) \tag{10}$$

та умовою нормування власної функції

$$\iint\limits_{\Omega^{(1)}} r(x,y)\,u^2(x,y)dx\,dy=1. \tag{11}$$

Диференціюємо (1) по d_k°, множимо на $u(x,y)$, інтегруємо на області вписаного прямокутника та сумуємо, аналогічно диференціюємо (1) по $d_k^{\bullet}$, множимо на $u(x,y)$, інтегруємо на області описаного прямокутника, сумуємо і отримуємо

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial\lambda}{\partial d_k^{\circ}}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{c_k^{\circ}}^{d_k^{\circ}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(-\Delta\frac{\partial u}{\partial d_k^{\circ}}+(q-\lambda r)\frac{\partial u}{\partial d_k^{\circ}}\right)dydx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{c_k^{\circ}}^{d_k^{\circ}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(-\Delta\frac{\partial u}{\partial d_k^{\circ}}u+\Delta u\frac{\partial u}{\partial d_k^{\circ}}\right)dydx,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial\lambda}{\partial d_k^{\bullet}}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{c_k^{\bullet}}^{d_k^{\bullet}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(-\Delta\frac{\partial u}{\partial d_k^{\bullet}}+(q-\lambda r)\frac{\partial u}{\partial d_k^{\bullet}}\right)udy=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{c_k^{\bullet}}^{d_k^{\bullet}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(-\Delta\frac{\partial u}{\partial d_k^{\bullet}}u+\Delta u\frac{\partial u}{\partial d_k^{\bullet}}\right)dydx$$

Розглянемо один з доданків суми інтегралів вписаних прямокутників

...ів. Нехай $k = j$. Тоді маємо:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial d_j^*} = \int\limits_{c_j^*}^{d_j^*}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\left(-\Delta\frac{\partial u}{\partial d_j^*}u + \Delta u\frac{\partial u}{\partial d_j^*}\right)dydx =$$

$$= \int\limits_{c_j^*}^{d_j^*}\left(u_x'\frac{\partial u}{\partial d_j^*} - u\frac{\partial u_x'}{\partial d_j^*}\right)\Bigg|_{x=x_j}^{x=x_{j+1}} dy + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\left(u_y'\frac{\partial u}{\partial d_j^*} - u\frac{\partial u_y'}{\partial d_j^*}\right)\Bigg|_{y=c_j^*}^{y=d_j^*} dx \tag{12}$$

Подібним чином отримуємо

$$\frac{\partial\lambda}{\partial c_j^*} = \int\limits_{c_j^*}^{d_j^*}\left(u_x'\frac{\partial u}{\partial c_j^*} - u\frac{\partial u_x'}{\partial c_j^*}\right)\Bigg|_{x=x_j}^{x=x_{j+1}} dy + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\left(u_y'\frac{\partial u}{\partial c_j^*} - u\frac{\partial u_y'}{\partial c_j^*}\right)\Bigg|_{y=c_j^*}^{y=d_j^*} dx, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_{j+1}} = \int\limits_{c_j^*}^{d_j^*}\left(u_x'\frac{\partial u}{\partial x_{j+1}} - u\frac{\partial u_x'}{\partial x_{j+1}}\right)\Bigg|_{x=x_j}^{x=x_{j+1}} dy + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\left(u_y'\frac{\partial u}{\partial x_{j+1}} - u\frac{\partial u_y'}{\partial x_{j+1}}\right)\Bigg|_{y=c_j^*}^{y=d_j^*} dx, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_j} = \int\limits_{c_j^*}^{d_j^*}\left(u_x'\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial u_x'}{\partial x_j}\right)\Bigg|_{x=x_j}^{x=x_{j+1}} dy + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\left(u_y'\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial u_y'}{\partial x_j}\right)\Bigg|_{y=c_j^*}^{y=d_j^*} dx. \tag{15}$$

Диференціюючи крайові умови (7)-(10), маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x_{j+1}}(x_j, y) = \alpha(y)\frac{\partial u'_x(x_j, y)}{\partial x_{j+1}}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_{j+1}}(x, c_k^*) = \gamma(x)\frac{\partial u'_y(x, c_j^*)}{\partial x_{j+1}}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_{j+1}}(x_{j+1}, y) + u'_x(x_{j+1}, y) = \beta(y)\left(\frac{\partial u'_x(x_{j+1}, y)}{\partial x_{j+1}} + u''_{xx}(x_{j+1}, y)\right), \tag{18}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_{j+1}}(x, d_j^*) + u'_y(x, d_j^*) = \delta(x)\left(\frac{\partial u'_y(x, d_j^*)}{\partial x_{j+1}} + u''_{yy}(x, d_j^*)\right). \tag{19}$$

Враховуючи (7)-(10) та (16)-(19), рівняння (14) подамо у вигляді

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_{j+1}} = \int\limits_{c_j^*}^{d_j^*} u'_x(x_{j+1}, y)\left(\beta u''_{xx}(x_{j+1}, y) - u'_x(x_{j+1}, y)\right)dy +$$

$$+ \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} u'_y(x, d_j^*)\left(\delta u''_{yy}(x, d_j^*) - u'_y(x, d_j^*)\right)dx =$$

$$= \int\limits_{c_j^*}^{d_j^*} u'_x(x_{j+1}, y)\left(\beta(q - \lambda r)u(x_{j+1}, y) - u'_x(x_{j+1}, y) - \beta u''_{yy}(x_{j+1}, y)\right)dy +$$

$$+ \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} u'_y(x, d_j^*)\left(\delta(q - \lambda r)u(x, d_j^*) - u'_y(x, d_j^*) - \delta u''_{xx}(x, d_j^*)\right)dx =$$

$$= \int\limits_{c_j^*}^{d_j^*}\left((u'_x(b, y))^2(\beta^2(q - \lambda r) - 1) - \beta u'_x(b, y)u''_{yy}(b, y)\right)dy +$$

$$+\int_{x_j}^{x_{j+1}}\Big(\big(u'_y(x,d_j^\circ)\big)^2\big(\delta^2(q-\lambda r)-1\big)-\delta u'_y(x,d_j^\circ)u''_{xx}(x,d_j^\circ)\Big)dx. \quad (20)$$

Подібним чином перетворимо інші рівняння

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}=-\int_{c_j^\circ}^{d_j^\circ}\Big(\big(u'_x(x_j,y)\big)^2\big(\alpha^2(q-\lambda r)-1\big)-\alpha u'_x(x_j,y)u''_{yy}(x_j,y)\Big)dy-$$

$$-\int_{x_j}^{x_{j+1}}\Big(\big(u'_y(x,d_j^\circ)\big)^2\big(\gamma^2(q-\lambda r)-1\big)-\gamma u'_y(x,d_j^\circ)u''_{xx}(x,d_j^\circ)\Big)dx, \quad (21)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial d_j^\circ}=\int_{c_j^\circ}^{d_j^\circ}\Big(\big(u'_x(x_{j+1},y)\big)^2\big(\beta^2(q-\lambda r)-1\big)-\beta u'_x(x_{j+1},y)u''_{yy}(x_{j+1},y)\Big)dy+$$

$$+\int_{x_j}^{x_{j+1}}\Big(\big(u'_y(x,d_j^\circ)\big)^2\big(\delta^2(q-\lambda r)-1\big)-\delta u'_y(x,d_j^\circ)u''_{xx}(x,d_j^\circ)\Big)dx, \quad (22)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial c_j^\circ}=-\int_{c_j^\circ}^{d_j^\circ}\Big(\big(u'_x(x_j,y)\big)^2\big(\alpha^2(q-\lambda r)-1\big)-\alpha u'_x(x_j,y)u''_{yy}(x_j,y)\Big)dy-$$

$$-\int_{x_j}^{x_{j+1}}\Big(\big(u'_y(x,d_j^\circ)\big)^2\big(\gamma^2(q-\lambda r)-1\big)-\gamma u'_y(x,d_j^\circ)u''_{xx}(x,d_j^\circ)\Big)dx. \quad (23)$$

При $\alpha(y)=\beta(y)=\gamma(x)=\delta(x)=0$ задача (1),(7)-(10) перетворюється в задачу (3),(4) з розв'язанням $(\mu^{(1)},f^{(1)})$, а граничні умови

$$f^{(1)}(x_j,y)=0,\quad f^{(1)}(x_{j+1},y)=0,\quad f^{(1)}(x,c_j^\circ)=0,\quad f^{(1)}(x,d_j^\circ)=0 \quad (24)$$

цієї задачі приводять до

$$\frac{\partial\mu^{(1)}}{\partial x_{j+1}}=\frac{\partial\mu^{(1)}}{\partial d_j^\circ}=-\left(\int_{c_j^\circ}^{d_j^\circ}\big((f^{(1)})'_x(x_{j+1},y)\big)^2dy+\int_{x_j}^{x_{j+1}}\big((f^{(1)})'_y(x,d_j^\circ)\big)^2dx\right)<0,$$

$$\frac{\partial\mu^{(1)}}{\partial x_j}=\frac{\partial\mu^{(1)}}{\partial c_j^\circ}=\int_{c_j^\circ}^{d_j^\circ}\big((f^{(1)})'_x(x_j,y)\big)^2dy+\int_{x_j}^{x_{j+1}}\big((f^{(1)})'_y(x,d_j^\circ)\big)^2dx>0. \quad (25)$$

Праві частини виразів (25) не залежать від j, і, отже, отриманий результат має місце для всіх вписаних прямокутників. Таким чином, досліджувані суми містять лише додатні або від'ємні доданки.

Подібний результат отримуємо, розглядаючи один з доданків інтегралів описаних прямокутників.

При $n\to\infty$ маємо $h\to 0$, $c_k^\circ\to Y_d$, $c_k^\circ\to Y_d$, $d_k^\circ\to Y_u$, $d_k^\bullet\to Y_u$, тоді (25) набуде виду:

$$\frac{\partial\mu^{(1)}}{\partial b}=\frac{\partial\mu^{(1)}}{\partial Y_u}=-\left(\int_{Y_d}^{Y_u}\big((f^{(1)})'_x(b,y)\big)^2dy+\int_a^b\big((f^{(1)})'_y(x,Y_u)\big)^2dx\right)<0,$$

$$\frac{\partial\mu^{(1)}}{\partial a}=\frac{\partial\mu^{(1)}}{\partial Y_d}=\int_{Y_d}^{Y_u}\big((f^{(1)})'_x(a,y)\big)^2dy+\int_a^b\big((f^{(1)})'_y(x,Y_d)\big)^2dx>0. \quad (26)$$

Нехай $\{(\mu^{(i)},f^{(i)})\}$ – дискретна множина розв'язань задачі на (1)

... $\Gamma^{(i)} \to \Gamma$, де $i = 1,2,\ldots$ і $\Omega^{(1)} \subset \Omega^{(2)} \subset \ldots \subset \Omega^{(i)} \subset \cdots \subset \Omega$. Тоді маємо

$$\lim_{i\to\infty} \mu_i(a,b,Y_d,Y_u) = \lambda . \tag{27}$$

Рівняння (26), (27) забезпечують для $\mu^{(i)}$ монотонне спадання до λ ... $\Gamma^{(i)} \to \Gamma$, тобто

$$\mu_i(a,b,Y_d,Y_u) \geq \lambda . \tag{28}$$

З іншого боку, при $\alpha(y) \to \infty$, $\beta(y) \to \infty$, $\gamma(x) \to \infty$, $\delta(x) \to \infty$ із за... (1),(7)-(10) отримуємо задачу (5),(6) з розв'язанням $\left(\nu^{(i)}, g^{(i)}\right)$, для якої ...чатку маємо

$$\frac{\partial \nu^{(i)}}{\partial x_{j+1}} = \frac{\partial \nu^{(i)}}{\partial d_j^*} > 0 , \quad \frac{\partial \nu^{(i)}}{\partial x_j} = \frac{\partial \nu^{(i)}}{\partial c_j^*} < 0 .$$

...потім, аналогічно до попереднього отримаємо

$$\frac{\partial \nu^{(i)}}{\partial b} = \frac{\partial \nu^{(i)}}{\partial Y_u} > 0 , \quad \frac{\partial \nu^{(i)}}{\partial a} = \frac{\partial \nu^{(i)}}{\partial Y_d} < 0 . \tag{29}$$

З нерівностей (29), враховуючи монотонність $\nu_i(a,b,Y_d,Y_u)$ відносно ..., b, Y_d, Y_u, маємо $\nu_i(a,b,Y_d,Y_u) \leq \lambda$ і $\lim_{i\to\infty} \nu_i(a,b,Y_d,Y_u) = \lambda$.

Отож, при виконанні умови $q(x,y) - \lambda r(x,y) > 0$ мають місце нерівно... $\nu(a,b,Y_d,Y_u) \leq \lambda \leq \mu(a,b,Y_d,Y_u)$ і власні значення апроксимуючих задач ...(4) та (5),(6) рівномірно збігаються до відповідних значень сингулярної ...задачі (1),(2). Теорему доведено.

Подібний результат отримуємо, подаючи область $\Omega^{(i)}$ як криволі...ну трапецію з розбиттям по змінній y.

Наслідок. Метод легко розповсюджується на задачу (1),(2) з дво...в'язною областю визначення $\Omega^{(i)}$ та на випадок трьох і більше змінних ...диференціальної задачі (1),(2).

Література.

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 736 с.
2. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
3. Ляшенко Б. Н. Методы решения сингулярных задач Штурма-Лиувилля. — К.: Лыбидь, 1991. — 126 с.

Надійшла до редакції 15.04.2001