Кривонос О.М, Ляшенко Б.М.
(Житомирський державний педагогічний університет ім. І.Франко)
rootzhpi@niiit.kiev.ua

ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ СИНГУЛЯРНОГО ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

Математичні моделі лазерної техніки, оптики і спектроскопії, теорії катастроф приводять до визначення власних значень двовимірних сингулярних операторів другого порядку. А для квантової механіки такі оператори є, певно, основним математичним апаратом.

Розглянемо можливість отримання двосторонньої апроксимації власних значень рівняння Шредінгера

$$\Delta u - (q(x,y) - \lambda r(x,y))u = 0, \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to \Gamma} u(x,y) = 0, \qquad (2)$$

де $r(x,y) > 0$, а сама задача має особливість, що проявляється в необмеженості області означення G або в необмеженому зростанні потенціальної функції $q(x,y)$ на межі Γ цієї області.

Розглянемо дві допоміжні задачі на підобласті $G_1 \subset G$, де Γ_1 – її контур:
з крайовими умовами Діріхле

$$\Delta f - (q(x,y) - \mu r(x,y))f = 0, \tag{3}$$

$$f(x,y)\big|_{\Gamma_1} = 0 \tag{4}$$

та Неймана

$$\Delta g - (q(x,y) - \nu r(x,y))g = 0. \tag{5}$$

$$g'(x,y)\big|_{\Gamma_1} = 0. \tag{6}$$

Тут контур Γ_1 обирається так, щоб всі точки сингулярності залишалися у вилученій області $G \setminus G_1$. Власні значення μ, ν задач (3), (4) та (5), (6) забезпечують двосторонньої апроксимації відповідних власних значень λ задачі (1), (2) і збігаються до них при $\Gamma_1 \to \Gamma$, якщо у вилучених областях має місце $q(x,y) - \lambda r(x,y) > 0$. Для спрощення викладу подамо область G_1 у вигляді прямокутника зі сторонами, що лежать на прямих $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, де $a < b$, $c < d$.

Тоді, вводячи крайові умови в точках урізання

$$u(a,y) = \alpha u'_x(a,y),\ u(b,y) = \beta u'_x(b,y),$$

$$u(x,c) = \gamma u'_y(x,c),\ u(x,d) = \delta u'_y(x,d) \tag{7}$$

та враховуючи умову нормування власної функції

$$\iint_{\Gamma} r(x,y) u^2(x,y) dxdy = 1, \tag{8}$$

для задачі Діріхле ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$) отримуємо $\dfrac{\partial\lambda}{\partial a} > 0$, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial b} < 0$, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial c} > 0$, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial d} < 0$, а для задачі Неймана ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = \infty$) – $\dfrac{\partial\lambda}{\partial a} < 0$, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial b} > 0$, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial c} < 0$, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial d} > 0$.

Нехай $\{\lambda(a,b,c,d)\}$, $\{\mu(a,b,c,d)\}$, $\{\nu(a,b,c,d)\}$ – множини власних значень задач (1),(2), (3),(4), (5),(6) при різних значеннях параметрів a, b, c, d. Тоді з монотонності $\lambda(a,b,c,d)$ що-до a, b, c, d випливає, що, при виконанні умови $q(x,y)-\lambda r(x,y)>0$ мають місце нерівності $\nu(a,b,c,d)\leq\lambda(a,b,c,d)<\mu(a,b,c,d)$ і власні значення апроксимуючих задач (3), (4) та (5), (6) збігаються до відповідних значень сингулярної задачі (1), (2).