УДК 511:378.147

Т. В. Дідківська,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
ORCID: 0000-0003-0069-6426
І. А. Сверчевська,
кандидат педагогічних наук, доцент
(Житомирський державний університет імені Івана Франка)
iryna_sver@ukr.net
ORCID: 0000-0001-7306-3836

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ У СТАРОВИННИХ ЗАДАЧАХ

Принцип історизму розглядається як педагогічна основа вироблення якісних теоретичних знань та практичних умінь при навчанні математики. Ми виділяємо визначні історичні задачі, зокрема задачі на розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. До задач пропонуються історичні довідки, які сприяють зацікавленню поставленими питаннями та викликають інтерес до самостійного розв'язування задач. Рекомендується розглядати авторські методи також у сучасних позначеннях, робити висновки щодо методів розв'язування.

Ключові слова: *система рівнянь, принцип історизму, історична задача, корінь рівняння, єгипетський папірус, вавилонські задачі.*

Постановка проблеми. До розв'язування систем алгебраїчних рівнянь зводяться як практичні задачі, так і задачі з різних розділів математики. Тому розв'язуванню таких систем приділяється значна увага ще в курсі шкільної математики, причому застосовуються штучні способи, які дозволяють звести систему до одного рівняння з одним невідомим. В університетському курсі алгебри це завдання розв'язується в теорії виключення на основі поняття результанту.

Оскільки пошук методів розв'язування систем нелінійних рівнянь становить значні труднощі, ми вважаємо за доцільне ознайомлювати студентів та вчителів з методами розв'язування таких систем, які були запропоновані математиками різних часів у визначних історичних задачах. Для цього було проведено вивчення й теоретичний аналіз першоджерел та іншої наукової літератури щодо методів розв'язування систем нелінійних рівнянь єгипетськими, шумеро-вавилонськими та давньокитайськими математиками. Наведено коментарі та зроблено реконструкцію деяких задач. Запропоновано формалізацію старовинних задач на основі сучасної символіки, для текстових задач побудовано математичні моделі у вигляді систем нелінійних рівнянь. Висловлено гіпотези виникнення методів, запропонованих у старовинних задачах.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Багатьма дослідниками визнано, що неможливо досконало оволодіти знанням предмету, якщо не бути обізнаним з головними етапами його розвитку. Застосуванню елементів історії математики приділяли значну увагу протягом усього часу навчання математики. Так, В. Н. Молодший виокремив елементи історії математики для вивчення шкільної математики. Г. І. Глейзер дослідив можливості застосування історії математики у процесі вивчення теоретичних питань і розв'язування задач. А. Т. Умаров розробив основи використання принципу історизму при навчанні математики. А. Г. Конфорович поряд з іншими можливостями застосування історії математики виділив визначні історичні задачі.

Відображення історичного матеріалу в курсах елементарної та вищої математики у підготовці майбутніх учителів розробила В. Г. Бевз. Роль історії математики в естетичному вихованні студентів дослідила Н. О. Вірченко.

Ми пов'язуємо історію математики з виробленням практичних умінь студентів, і тому досліджуємо роль визначних історичних задач при навчанні математики. Зокрема при вивченні алгебри і теорії чисел, а саме її розділів: теорія чисел [1; 2; 3], алгебра многочленів [4].

При навчанні математики важливим завданням є вироблення вмінь розв'язувати задачі, зокрема задачі, які зводяться до систем рівнянь. Розв'язування систем нелінійних рівнянь вимагає нестандартних методів, тому ми вважаємо за доцільне вивчення методів розв'язування таких систем в історичних задачах.

Метою статті є дослідження методів розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь у визначних історичних задачах з наступним застосуванням їх при навчанні математики.

Виклад основного матеріалу.

Задачі з єгипетських папірусів

Основними пам'ятками єгипетської математики є папіруси: Райнда (Ахмеса), який містить 84 задачі, написаний бл. 1800 – 1600 р. р. до н. е.; Московський, який відноситься до 1900 р. до н. е. та містить 25 задач; Кахунський папірус (1900 р. до н. е.) та Берлінський папірус (2200 р. до н. е.) [5: 33].

1. Задача з Берлінського папірусу.

Розділити площу 100 кв. од. на два квадрати, сторони яких відносяться як $1 : \frac{3}{4}$.

Задача зводиться до системи рівнянь: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x : y = 1 : \frac{3}{4} \end{cases}$.

Єгипетський математик розв'язує методом хибного припущення. Нехай перше число 4, а друге 3, тоді сума квадратів 25, корінь дорівнює 5. А за умовою сума квадратів 100, корінь дорівнює 10. Отже припущення потрібно збільшити в 2 рази, перше число 8, а друге 6.

Запишемо цей метод у сучасних позначеннях: $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, $x = 4k$, $y = 3k$, $x^2 + y^2 = 100$, $16k^2 + 9k^2 = 100$, $k^2 = 4$, $k = 2$, $x = 8$, $y = 6$.

Для розв'язування цієї системи можна застосувати метод підстановки.

2. Задача з Кахунського папірусу.

Відношення чисел $2 : 1\frac{1}{2}$, сума квадратів 400. Знайти ці числа.

Маємо систему: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 400 \\ x : y = 2 : 1\frac{1}{2} \end{cases}$.

Задача розв'язується методом хибного припущення. $x = 2$, $y = 1\frac{1}{2}$, $x^2 + y^2 = 6\frac{1}{4}$. Корінь дорівнює $\frac{5}{2}$. Але корінь з 400 дорівнює 20, тобто у 8 разів більше. Тому перше число $2 \cdot 8 = 16$, друге число $1\frac{1}{2} \cdot 8 = 12$.

3. Задача з Московського папірусу.

Визначити довжини сторін прямокутника, якщо відомо їх відношення і площа фігури.

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \\ xy = S \end{cases}$.

Якщо перемножити рівняння, то одержимо: $x^2 = \frac{m}{n} S$, $x = \sqrt{\frac{m}{n} S}$. З першого рівняння $y = \frac{n}{m} x$, тоді $y = \frac{n}{m} \cdot \sqrt{\frac{m}{n} S} = \sqrt{\frac{n}{m} S}$.

Старовинні вавилонські задачі

Основу вавилонської математики заклали шумери, які мешкали в стародавньому Дворіччі, утвореному річками Тигром і Євфратом. Основою вивчення спадку Стародавнього Вавилону є глиняні клинописні таблички, які написані приблизно в 1800 – 1600 р. р. до н. е. (епоха Хаммурапі) та протягом 300 – 200 р. р. до н. е. (епоха Селевкідів). Серед них є тексти-таблиці та тексти-задачники, що містять чимало задач, які приводять до розв'язування нелінійних алгебраїчних систем рівнянь. Характерним є виділення "канонічних" систем, які розв'язувалися за готовими формулами. Розглянемо деякі з них у сучасних позначеннях [5: 36].

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}.$$

Розв'язок одержується за словесним правилом, яке в сучасній алгебраїчній символіці має вигляд $x=\frac{1}{2}a+t$; $y=\frac{1}{2}a-t$, де $t=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2-b}$.

Ймовірно виведення цього правила було наступним: оскільки сума $x+y=a$, то на скільки x більше за a (позначимо t), на стільки ж y менше за a. маємо $x=\frac{1}{2}a+t$; $y=\frac{1}{2}a-t$. З другого рівняння $xy=\left(\frac{1}{2}a+t\right)\left(\frac{1}{2}a-t\right)$, або (залежність $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ була відома вавилонянам) одержуємо $\left(\frac{1}{2}a\right)^2-t^2=b$; $t=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2-b}$.

Якщо вважати x і y коренями квадратного рівняння $z^2-az+b=0$ і визначити їх за відомою нам формулою, то одержимо $x=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$; $y=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$.

Тобто можна зробити висновок, що вавилонським математикам було відомо правило вираження коренів квадратного рівняння через його коефіцієнти.

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x+y=b \end{cases}.$$

Правило, за яким розв'язує вавилонський математик у сучасних позначеннях має вигляд: $x=\frac{1}{2}b+t$; $y=\frac{1}{2}b-t$, де $t=\sqrt{\frac{a}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

Ймовірно він прийшов до цього правила наступним чином $x=\frac{b}{2}+t$, $y=\frac{b}{2}-t$. З першого рівняння: $\left(\frac{b}{2}+t\right)^2+\left(\frac{b}{2}-t\right)^2=a$. Залежність $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ була відома вавилонянам, тому $\left(\frac{b}{2}\right)^2+bt+t^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-bt+t^2=a$; $2\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2+2t^2=a$; $t^2=\frac{a}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Якщо вважати x та y коренями рівняння, одержаного після підстановки $y=b-x$, тобто $x^2-bx+\frac{b^2-a}{2}=0$, то за сучасним правилом $x=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{b^2-a}{2}}=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{a}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$, $y=b-x=b-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{a}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{a}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=15 \\ x+y=7 \end{cases}$$

Розв'язання вавилонського математика.

Поділити друге рівняння на 2, тобто $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\frac{7}{2}$, та відняти одержаний вираз від першого рівняння, тоді одержиться $xy-\frac{1}{6}y=11\frac{1}{2}$. Від обох части другого рівняння відняти $\frac{1}{6}$, тоді матимемо систему рівнянь:

$\begin{cases} xy-\frac{1}{6}y=11\frac{1}{2} \\ x+y-\frac{1}{6}=6\frac{5}{6} \end{cases}$, яку перетворити $\begin{cases} y\left(x-\frac{1}{6}\right)=11\frac{1}{2} \\ y+\left(x-\frac{1}{6}\right)=6\frac{5}{6} \end{cases}$ і, ввівши позначення $y=u;\ x-\frac{1}{6}=v$, одержати нову систему $\begin{cases} u+v=6\frac{5}{6} \\ uv=11\frac{1}{2} \end{cases}$. Ця система має канонічну форму і розв'язується за готовими формулами (задача 1):

$u=3\frac{5}{12}+\sqrt{\left(3\frac{5}{12}\right)^2-11\frac{1}{2}}=3\frac{5}{12}+\sqrt{\frac{1681}{144}-\frac{23}{2}}=3\frac{5}{12}+\sqrt{\frac{25}{144}}=3\frac{5}{12}+\frac{5}{12}=3\frac{5}{6}$, $y=u=3\frac{5}{6}$,

$v=3\frac{5}{12}-\sqrt{\left(3\frac{5}{12}\right)^2-11\frac{1}{2}}=3\frac{5}{12}-\frac{5}{12}=3$, $x=v+\frac{1}{6}=3\frac{1}{6}$.

Відповідь: $x=3\frac{1}{6}$, $y=3\frac{5}{6}$.

4. Розв′язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xyz+xy=1\frac{1}{6} \\ y=\frac{2}{3}x \\ z=12x \end{cases}$$

Якщо підставити вирази *y* і *z* через *x* у перше рівняння, то прийдемо до рівняння $48x^3+4x^2=7$. Помножимо його на 36 і одержимо нове рівняння $(12x)^3+(12x)^2=252$. Після заміни $12x=t$, маємо рівняння $t^3+t^2-252=0$, яке вавилоняни, очевидно, розв'язували за допомогою таблиць чисел виду n^3+n^2. Знайдемо раціональні корені цього рівняння сучасним методом, використовуючи необхідну умову раціонального кореня алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами: *t* належить множині дільників вільного члена $252=2^2\cdot3^2\cdot7$. Достатню умову кореня задовольняє $t=6$. Маємо: $t^3+t^2-252=(t-6)(t^2+7t+42)=0$. Рівняння $t^2+7t+42=0$ не має дійсних коренів. Отже, існує єдиний раціональний корінь $t=6$. Тоді $12x=6$, $x=\frac{1}{2}$. З другого та третього рівнянь системи визначаємо відповідно $y=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, $z=12\cdot\frac{1}{2}=6$.

Відповідь: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=6$.

5. Вавилонська задача на систему рівнянь другого степеня (XVIII ст. до н. е.)

Довжину і ширину я помножив і площу одержав. Потім надлишок довжини над шириною я додав до площі; 3,3 одержалось у мене. Потім я довжину і ширину склав: 27. Запитується довжина, ширина і площа.

(Дано) 27 і 3,3 суми

(Результат) 15 довжина, 12 ширина, 3,0 площа.

Далі дано алгоритм розв'язування у словесній формі. Подамо дані в десятковій системі числення і алгоритм у сучасних позначеннях. Зауважимо, що вавилоняни користувалися шістдесятковою системою числення, тому $3{,}3 = 3 \cdot 60 + 3 = 183$. Якщо позначити довжину x, ширину y, то умова задачі запишеться у вигляді системи:

$\begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{cases}$. Додамо рівняння системи: $xy + 2x = 210$ і одержується система:

$\begin{cases} x(y+2) = 210 \\ x + y = 27 \end{cases}$, або $\begin{cases} x(y+2) = 210 \\ x + (y+2) = 29 \end{cases}$. Після заміни $y + 2 = z$ маємо канонічну систему:

$\begin{cases} xz = 210 \\ x + z = 29 \end{cases}$. Розв'язуємо цю систему за правилом (приклад 1): $x = \frac{1}{2} \cdot 29 + t$, $z = \frac{1}{2} \cdot 29 - t$,

$t = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 29\right)^2 - 210}$, $t = \sqrt{\frac{841}{4} - 210} = \frac{1}{2}$, $x = 14\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 15$, $z = 14\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 14$, $y = z - 2$, $y = 12$.

Відповідь: $x = 15$, $y = 12$, $S = 180$.

Про другий розв'язок системи $t = -\frac{1}{2}$, $x = 14\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 14$, $z = 14\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 15$, $y = 15 - 2 = 13$ у тексті не згадується.

Задача з китайського трактату "Математика в дев'яти книгах" (152 р. до н. е.)

"Математика в дев'яти книгах" – головний твір китайської математики стародавнього періоду. Ця книга – енциклопедія математичних знань для практичної діяльності. В книзі II "Математики" є задачі, які виражаються нелінійною системою трьох рівнянь з чотирма змінними, що зводяться до одного рівняння з двома змінними, яке має єдиний розв'язок у цілих додатних числах [6: 52].

78 бамбуків малого і великого розміру коштують 576 цяней, запитується, скільки коштує кожний? (в умові не сказано, що різниця цін 1 цянь і ціни – цілі числа).

Якщо позначити кількості бамбуків x і y, а ціни за штуку u і v, то задача зводиться до системи рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 78 \\ ux + vy = 576 \\ v = u + 1 \end{cases}$$

Перетворимо друге рівняння $ux + vy = 576$; $(ux + uy) + (vy - uy) = 576$; $u(x + y) + y(v - u) = 576$. Враховуючи перше і третє рівняння, одержимо $78 \cdot u + y \cdot 1 = 576$. Маємо $u + \frac{y}{78} = 7 + \frac{30}{78}$. Єдині цілі розв'язки $u = 7,\ y = 30$. З першого рівняння $x = 78 - y = 78 - 30 = 48$, з третього $v = u + 1 = 7 + 1 = 8$.

Висновки. Оскільки при навчанні математики важливо розвинути уміння розв'язувати системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, то доцільно дослідити можливості використання методів, запропонованих математиками різних часів у визначних історичних задачах. Ми виокремили кілька методів.

- *Метод хибного припущення*, який дає можливість елементарно розв'язати систему рівнянь. За допомогою сучасної символіки, ввівши коефіцієнт пропорційності, дали роз'яснення, як вибирати припущення та проводити подальші міркування.
- У залежності від особливості системи застосовується *метод штучних перетворень* з метою зведення до канонічної системи рівнянь, для якої відоме правило розв'язування.
- *Застосування заміни змінних* і введення параметра, який визначається з одного рівняння. Важливим є висунення гіпотези, яким чином математик стародавніх часів прийшов до запропонованої заміни, та обґрунтування цієї гіпотези.
- *Нетрадиційні методи*, які для систем неоднорідних рівнянь мають особливе значення та зводять розв'язання системи до одного рівняння з одним невідомим.

Ми розглянули методи розв'язування у старовинних задачах, але значні можливості мають задачі, розв'язані різними методами математиками періодів історії математики сталих та змінних величин. Важливо порівняти їх з методами сучасної математики та дослідити можливості використання цих методів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Дідківська Т. В. Старовинні історичні задачі при підготовці майбутніх педагогів до практичної діяльності / Т. В. Дідківська, І. А. Сверчевська // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – 2011. – Вип. 57. – С. 59–63.
2. Дідківська Т. В. Логічне та історичне під час вивчення порівнянь в курсі теорії чисел / Т. В. Дідківська, І. А. Сверчевська // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – 2012. – Вип. 63. – С. 110–114.
3. Дідківська Т. В. Визначні історичні задачі з теорії чисел / Т. В. Дідківська, І. А. Сверчевська // Актуальні питання природничо-математичної освіти : [зб. наук. праць]. – Суми: ВВП "Мрія". – № 1. – 2013. – С. 8–18.
4. Сверчевська І. Методи розв'язування рівнянь в історичних задачах / І. А. Сверчевська // Математика в рідній школі. – 2015. – № 11. – С. 43–47.
5. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / Под ред. А. П. Юшкевича.– М. : Просвещение, 1976. – 320 с.
6. Юшкевич А. П. История математики в средние века / А. П. Юшкевич.–М. : Госиздат физико-математической литературы, 1961. – 448 с.

REFERENCES (TRANSLATED & TRANSLITERATED)

1. Didkivs'ka T. V. Starovynni istorychni zadachi pry pidgotovtsi maybutnikh pedagogiv do praktychnoyi diyal'nosti [Number Theory Problems with Historical Meaning in Future Pedagogues Training] / T. V. Didkivs'ka, I. A. Sverchevska // Visnyk Zhytomyrs'kogo derzhavnogo universytetu imeni Ivana Franka [Zhytomyr Ivan Franko State University Journal]. – 2011. – Vypusk. 57. – S. 59–63.
2. Didkivs'ka T. V. Logichne ta istorychne pid chas vyvchennya porivnyan' v kursi teoriyi chysel [Logical and Historical in Studying Congruency in a Number Theory Course] / T. V. Didkivs'ka, I. A. Sverchevs'ka // Visnyk Zhytomyrs'kogo derzhavnogo universytetu imeni Ivana Franka [Zhytomyr Ivan Franko State University Journal]. – 2012. – Vypusk. 63. – S. 110–114.
3. Didkivs'ka T. V. Vyznachni istjrychni zadachi z teorii chysel [Number Theory Historical Tasks] / T. V. Didkivs'ka, I. A. Sverchevs'ka // Aktual'ni pytannya pryrodnycho-matematychnoyi osvity [Topical Issues of Natural Science and Mathematics Education] : [zb. nauk. prats'] –Sumy : VVP "Mriya". – № 1. – 2013. – S. 8–18.
4. Sverchevs'ka I. A. Metody rozvyazuvannya rivnyan' v istorychnykh zadachakh [The Methods of Quations Solving in Historical Problems] / I. A. Sverchevska // Matematyka v ridniy shkoli [Mathematics at Native School]. – 2015. – № 11. – S. 43–47.
5. Khrestomatiya po istorii matematiki. Arifmetika i algebra. Teoriya chisel. Geometriya [Antology of History of Mathematics. Arithmetic and Algebra. Number Theory. Geometry] / Pod red. A. P. Yushkevicha. – M. : Prosveschenie, 1976. – 320 s.
6. Yushkevich A. P. Istoriya matematiki v sredniye veka [The History of Medieval Mathematics] / A. P. Yushkevich.– M. : Gosizdat fiziko-matematicheskoy literatury, 1961. – 448 s.

Дидковская Т. В., Сверчевская И. А. Системы уравнений в старинных задачах.

Принцип историзма рассматривается как педагогическая основа формирования качественных теоретических знаний и практических умений при обучении математике. Мы выделяем замечательные исторические задачи, в частности задачи на решение систем нелинейных алгебраических уравнений. К задачам предлагаются исторические справки, которые способствуют заинтересованности поставленными вопросами и вызывают интерес к самостоятельному решению задач. Рекомендуется рассматривать авторские методы также в современных обозначениях, делать выводы о методах решения.

Ключевые слова: *система уравнений, принцип историзма, историческая задача, корень уравнения, египетский папирус, вавилонские задачи.*

Didkivska T. V., Sverchevska I. A. Systems of Equations in Ancient Problems.

There is a wide range of practical problems as well as theoretical problems in different fields of mathematics, which could be solved using the systems of algebraic equations. This is why a significant attention is devoted to solving such systems beginning with school mathematics. It is noteworthy that in this case pupils are already being taught to apply artificial methods, allowing reducing the system to one equation with one unknown. University course in algebra includes solving this task using exception theory, particularly the resultant notion. Since searching for the systems of nonlinear equations solving methods may present serious difficulties, we consider it would be appropriate to familiarize students and teachers with the methods of solving of such systems, which have been suggested in famous historical problems.

The issues of applying the history of mathematics elements in teaching of mathematics have been researched by V. N. Molodshyi, H. I. Hleizer, A. H. Konforovych, V. H. Bevz, N. O. Virchenko etc.

The principle of historicism is considered as pedagogical foundation for working out high quality theoretical knowledge and practical skills in teaching mathematics. We separate the famous historical problems, specifically problems which involve solving systems of nonlinear algebraic equations. The problems are followed by historical references which stimulate students' interest in advance questions and encourage them to solve problems by themselves. It is recommended to consider the authoring methods in modern designation, to make conclusions on the methods of solving.

As far as it is essential to develop the ability to solve systems of nonlinear algebraic equations, it would be appropriate to investigate the opportunity of using the methods, advised in famous historical problems. We consider the methods of solving applied in problems of Ancient Egypt, Babylon and China, but there is also much potential in problems solved by the mathematicians of "mathematics of constants" and "mathematics of variables". It is important to compare these methods with modern mathematical methods and to explore ways to take advantage using the latter.

Key words: *system of equations, the principle of historicism, historical problem, equation root, Egyptian papyrus, Babylonian problems.*