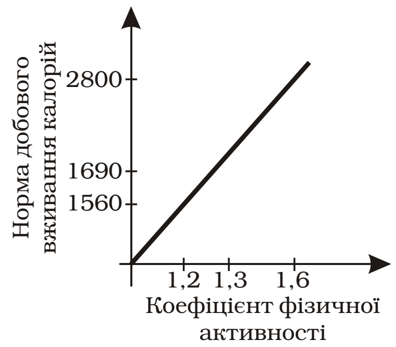
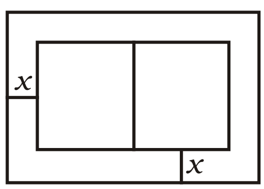


Мал. 1. Графік залежності фізичної активності і норми вживання калорій

Зі збільшенням виду активності має збільшуватися норма вживання калорій.

Тема «Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі» є в сучасній програмі з математики. Прикладом є задача про біл-борд, розв'язуючи яку, учень зводить рівняння до квадратного, шукає корені, аналізує отриманий результат відкинувши від'ємні значення.

Задача 9 (Рекламник). Компанія ПрінтІмідж, що спеціалізується на виготовленні рекламної продукції, отримала завдання розмістити на біл-борді площею 280 м² рекламу магазину, яка складатиметься з двох однакових блоків у вигляді прямокутників по 9 × 12 м, що розміщені по центру біл-борду (мал. 2). Знайти розміри рамки, якщо відомо, що вона має однакову ширину.



Мал. 2

Розв'язання. Нехай x — ширина рамки, тоді $(12 + 2x)$ — ширина біл-борду, $(18 + 2x)$ — його довжина.

$(12 + 2x) \cdot (18 + 2x) = 280;$

$4x^2 + 60x - 64 = 0;$

$x^2 + 15x - 16 = 0;$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1; \\ x_2 = -16, \end{array}\right.$ x_2 — не задовольняє умову задачі.

Відповідь. Рамка має ширину 1 м.

Наведені вище приклади задач і їх розв'язання відображають реалії сьогодення. Потреба в них і відсутність у чинних шкільних підручниках із алгебри, породжує проблему створення системи прикладних задач, які були б і цілями і засобами формування у школярів алгебраїчних компетентностей, умінь математичного моделювання. Проблема є, має бути і її розв'язання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фирсов В. В. О прикладной ориентации курса математики // Математика в школе. — 2006. — № 6. — С. 2 — 9.
2. Фирсов В. В. О прикладной ориентации курса математики // Математика в школе. — 2006. — № 7. — С. 2 — 13.
3. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсу алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. — К.: НПУ ім. М. П.Драгоманова, 2010. — 128 с.
4. Панченко Л. В. Система прикладних задач як засіб формування вмінь математичного моделювання у майбутніх вчителів математики / Л. В. Панченко // Математика в школі. — 2004. — № 9 — 10. — С. 21 — 28.

НАВЧАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧНІ ЗАДАЧІ З МАТЕМАТИКИ: МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ МЕТОДОМ ІНТЕРВАЛІВ

Сергій СЕМЕНЕЦЬ — завідувач кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету імені Івана Франка, доктор педагогічних наук, професор

У наших попередніх роботах було розкрито зміст і встановлено структуру математичних здібностей учнів, окреслено структурно-математичне мислення як різновид науково-теоретичного, простудійовано особливості реалізації задачного підходу в процесі формування навчально-математичної діяльності школярів. Установлено, що розвивальне навчання математики втілює *принцип розвивальної наступності*, згідно з яким розроблено задачну систему і встановлено зони найближчого математичного розвитку учнів. Насправді на концептуальному рівні в теорію навчання математики впроваджено наукову ідею про доцільність постановки та розв'язування задач *чотирьох рівнів змістового теоретичного узагальнення*, це, на нашу думку, забезпечує інтеграцію дедуктивної суті математики та діяльнісної теорії її навчання, а також уможливлює встановлення в навчанні математики однієї із чотирьох зон найближчого математичного розвитку учнів (базова, навчальна, навчально-теоретична, навчально-дослідницька). На кожному рівні задачної системи розвивального навчання математики передбачено його значущий компонент – рефлексія процесу учіння [1, 2]. Натомість дотепер залишається актуальною проблема організації навчально-математичної діяльності учнів у формі розв'язування навчально-теоретичних задач з математики, у процесі якого школярі оволодівають загальнологічними і загальноматематичними методами, у них насправді формується цілісна система знань і вмінь на рівні методології математики. У розробленій нами задачній системі навчально-теоретичні задачі з математики репрезентуються третім рівнем змістового теоретичного узагальнення і передбачають формування узагальнених способів дій під час вивчення методів, що застосовуються в цілій змістовій лінії.

Мета статті — у контексті задачного підходу до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів розробити навчальну модель процесу розв'язування нерівностей методом інтервалів, навести приклад її реалізації в старшій ланці шкільної математичної освіти, представлений рівень змістово-теоретичного узагальнення задач співвіднести із зоною найближчого математичного розвитку школярів.

Достеменно відомо, що універсальним методом розв'язування всіх типів нерівностей є метод інтервалів. Тому навчально-теоретична задача про знаходження узагальненого способу дій у процесі розв'язування нерівностей методом інтервалів, займає одне з чільних місць у шкільній математичній освіті. Його теоретичним підґрунтям слугує теорема Больцано-Коші: *якщо функція f неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків, то знайдеться принаймні одна точка $c \in (a; b)$, у якій значення функції дорівнює нулю.* Наслідком цієї теореми є твердження: *якщо функція неперервна і не має нулів на проміжку, то вона на цьому проміжку зберігає знак (набуває лише додатних чи від'ємних значень).* Отже, для визначення знаку такої функції достатньо знайти її значення в довільній точці проміжку.

Для формування узагальненого способу дій скористаємося моделлю процесу розв'язування навчально-теоретичних задач з математики [2]:

1. Постановка навчально-теоретичної задачі на основі навчальної (кількох навчальних).

2. Змістовий аналіз навчально-теоретичної задачі з метою знаходження загального відношення, характерного для певного типу навчальних задач.

3. Формування змістово-теоретичних абстракцій і узагальнень, створення теоретичної моделі загального відношення.

4. Конструювання навчально-теоретичної моделі методу розв'язування математичних задач у вигляді етапності (ієрархії) навчально-пізнавальних і математичних дій як результату узагальнення процесу розв'язування навчальних задач.

5. Змістове планування та конструювання системи часткових різнотипних математичних задач, що розв'язуються на основі сформованого методу.

6. Контроль і корекція навчально-теоретичних дій.

7. Самоаналіз і самооцінка (змістова, процесуальна, референтна, ціннісна) засвоєння моделі процесу розв'язування навчально-теоретичної задачі з математики.

Реалізуємо представлену модель.

1. На основі навчальних задач про спосіб дій у процесі розв'язування раціональних (дробово-раціональних) нерівностей формулюється навчально-теоретична задача про створення моделі процесу розв'язування нерівностей методом інтервалів.

2. За результатами змістового аналізу процесу розв'язування навчальних задач встановлюється, що характерним у кожній з них є використання властивостей неперервних на проміжку функцій.

3. Формування змістово-теоретичних абстракцій і узагальнень про умову знакосталості неперервної на проміжку функції: якщо функція $f(x)$ неперервна і $f(x) \neq 0$ для всіх $x \in [a; b]$, то $f(x) > 0$ або $f(x) < 0$ при $x \in [a; b]$.

4. Конструювання навчально-теоретичної моделі розв'язування нерівностей методом інтервалів.

4.1. *Змістовий аналіз нерівності, визначення її типу.*

4.2. *Рівносильні перетворення, зведення нерівності до рівносильної.*

4.3. *Виокремлення функції, знаки якої мають визначатися.*

4.4. *Установлення області визначення та проміжків неперервності функції.*

4.5. *Знаходження нулів функції (розв'язування рівняння).*

4.6. *Нанесення на числову вісь області визначення, проміжків неперервності та нулів функції.*

4.7. *Визначення знаків функції на кожному з одержаних проміжків, побудова кривої знаків.*

4.8. *Формулювання висновку про проміжки, де функція набуває значень вказаного знаку. Запис відповіді.*

4.9. *Змістовий аналіз і самоконтроль виконаних дій.*

4.10. *Самооцінка засвоєння узагальненого способу дій у процесі розв'язування нерівностей методом інтервалів (змістова, процесуальна, референтна, ціннісна).*

5. Змістове планування і добір (складання) різнотипних нерівностей, що розв'язуються методом інтервалів.

6. Контроль і корекція дій у ході розв'язування навчально-теоретичної задачі.

7. Самоаналіз і самооцінка засвоєння способу дій у процесі розв'язування навчально-теоретичної задачі про застосування методу інтервалів.

Представлена навчально-теоретична модель має дворівневу структуру. Вона, з одного боку, розкриває зміст методу інтервалів як універсального методу розв'язування нерівностей, а з іншого – встановлює шлях навчального пізнання, що забезпечує його розроблення й усвідомлене засвоєння учнями. Окрім цього, на кожному рівні передбачено самоаналіз, самооцінку і самоконтроль навчально-математичної діяльності, тут, власне кажучи, виконується особлива змістово-теоретична дія і складова теоретичного мислення — рефлексія процесу учіння.

За логікою сходження від загального до конкретного, реалізуємо побудовану навчально-теоретичну модель у процесі розв'язування нерівності у старшій школі

$$\frac{-2x^2+7x-3}{\log_2|x-1|}>0.$$

1. Нерівність строга. Ліва частина нерівності є часткою раціонального та логарифмічного виразів. Такий тип нерівностей належить до категорії трансцендентних.

2. Виконуємо рівносильні перетворення і зводимо нерівність до рівносильної

$$\frac{(x-0{,}5)(x-3)}{\log_2|x-1|}<0.$$

3. Виокремлюємо функцію

$$f(x)=\frac{(x-0{,}5)(x-3)}{\log_2|x-1|},$$

вона має набувати від'ємних значень.

4. Знаходимо область визначення функції

$f(x)=\dfrac{(x-0{,}5)(x-3)}{\log_2|x-1|}$: $x \in$

$\in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

На кожному з проміжків функція неперервна.

5. Знаходимо нулі функції: розв'язуємо рівняння

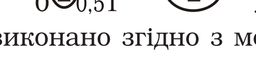
$$\frac{(x-0{,}5)(x-3)}{\log_2|x-1|}=0.$$

Його корені $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 3$.

6. Наносимо на числову вісь область визначення (проміжки неперервності) та нулі функції.

7. Визначаємо знаки функції на кожному з проміжків, будуємо криву знаків (див. мал.).

8. Робимо висновок про те, що на проміжках $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ і (2; 3) функція набуває від'ємних значень. Записуємо відповідь: $x \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right) \cup (2; 3)$.



9. Усі дії виконано згідно з моделлю процесу розв'язування нерівностей методом інтервалів, операції виконано правильно.

10. Зрозуміло (не зовсім зрозуміло, незрозуміло) теоретичне підґрунтя методу інтервалів (умова знакосталості неперервної на проміжку функції). Навчально-теоретичну модель процесу розв'язування нерівностей методом інтервалів створено і реалізовано самостійно (з допомогою однокласників, учителя). У навчанні переважали колективно розподілені форми роботи (самонавчання, провідною була роль учителя). Серед ціннісних орієнтирів переважали цінності процесу пізнання (успіху і визнання, відповідальності й обов'язку, розвитку або ж превалював зовнішній мотив). Результати самооцінки учні фіксують згідно з прийнятою системою знаків (геометричних фігур [3]).

Представлений рівень змістово-теоретичного узагальнення задачі співвідносимо із навчально-теоретичною зоною найближчого математичного розвитку учнів, у рамках якої моделюються узагальнені способи дій у процесі розв'язування всіх типів нерівностей. Відтак порізно мають вирішуватися навчально-теоретичні задачі, пов'язані з моделюванням процесу розв'язування нерівностей методами заміни, рівносильних перетворень, із використанням властивостей функцій. Організація повноцінної (цілісної) навчально-математичної діяльності здійснюється в умовах співпраці (співробітництва) вчителя та учнів, у ході колективного і колективно розподіленого розв'язування навчально-теоретичних задач з математики. *Перетворення навчально-теоретичної зони найближчого математичного розвитку учнів в зону їхнього актуального розвитку (де відповідний тип задач розв'язується учнями самостійно) засвідчує про нову інтелектуальну якість, перехід суб'єктів навчально-математичної діяльності (їхніх математичних здібностей) на вищий рівень розвитку.*

Саме в такому перетворенні квінтесенція розвивального навчання математики, яке насправді вможливлюється за умов диференційованого підходу, відмови від традиційно прийнятої установки на «готові» знання, реалізації принципу розвивальної наступності, рефлексії процесу учіння, суб'єкт-суб'єктних і міжособистісних взаємин учителя та учнів. Моделюванню процесу розв'язування інших навчально-теоретичних задач з математики будуть присвячені наші подальші роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Семенець С. П. Методологія і теорія розвивального навчання математики : [монографія] / С. П. Семенець. — Житомир : Вид-во О. О. Євенок, 2015. — 236 с.
2. Семенець С. П. Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів / С. П. Семенець // Матем. в рідній шк. — 2016. — № 4. — С. 14 — 18.
3. Семенець С. П. Рефлексія як особлива задача розвивального навчання математики / С. П. Семенець // Матем. в шк. — 2009. — № 10. — С. 13 — 15.