Бойко Анна,
студентка VII курсу, спеціальність «Математика»
Науковий керівник – ***Михайленко В. В.***
доктор фізико-математичних наук, професор

ВИКОРИСТАННЯ ІКТ ПРИ ЗНАХОДЖЕННІ ОБ'ЄМУ ПОВЕРХОНЬ

Багатогранні форми оточують нас всюди. Майже всі споруди, зведені людиною, від давньоєгипетських пірамід, до сучасних хмарочосів, мають форму багатогранників. Серйозний інтерес до многогранників виник близько чотирьох тисяч років тому і проявляється не тільки в рамках математики та її додатків.

Останнім часом ми стали свідками появи нового, актуального і корисного наукового напрямку - комп'ютерної математики. Її можна визначити як сукупність теоретичних, алгоритмічних, апаратних і програмних засобів, призначених для ефективного вирішення на комп'ютерах усіх видів математичних задач з високим ступенем візуалізації всіх етапів обчислень.

Системи комп'ютерної математики вже використовуються для вирішення навчальних, наукових та інженерних задач, наочної візуалізації даних і результатів обчислень і як зручних і повних довідників по математичних обчислень.

Однією з таких систем є Wolfram Alpha — база знань і набір обчислювальних алгоритмів.

Під *просторовою фігурою* будемо розуміти всяку обмежену множину точок простору.

Многогранною фігурою (многогранником) назвемо просторову фігуру, яка є замкненою областю (можливо й багатозв′язною) з межею, що міститься в скінченній кількості площин.

Будемо виходити з того, що всяка многогранна фігура має об'єм.

Позначимо довільну просторову фігуру через Ф. Будемо розглядати многогранники, які містять фігуру Ф, і які містяться в фігурі Ф (останні можуть і не існувати). Перші позначимо *G*, а їхні об'єми - $V(G)$. Другі позначимо *g*, а їхні об'єми $V(g)$. Многогранник *G* будемо називати описаним, а многогранник *g* – вписаним (якщо вписаних многогранників не існує, то за означенням візьмемо $V(g) = 0$).

Означення 1. Фігуру Ф назвемо *кубовною* (тобто такою, що має об'єм), якщо існує така послідовність $\{G_n\}$ описаних многогранників і така послідовність $\{g_n\}$ вписаних многогранників, об′єми $V(G_n)$ і $V(g_n)$ яких мають спільну границю:

$$\lim_{n\to\infty} V(G_n) = \lim_{n\to\infty} v(g_n)$$

Цю спільну границю й назвемо об'ємом фігури Ф.

Зокрема, фігура має нульовий об'єм, якщо її можна помістити у многогранну фігуру як завгодно малого об'єму.

Відмітимо ряд тверджень, які випливають з означення кубовності [1, с. 224].

*Твердження 1***.** Для того, щоб тіло Ф було кубовним, необхідно і достатньо, щоб поверхня, яка його обмежує, мала нульовий об'єм.

Твердження 2. Якщо поверхню можна описати явним рівнянням одного з трьох типів

$$z = f(x, y), y = g(z, x), x = h(y, z),$$

де f, g, h – неперервні функції двох аргументів у деяких обмежених областях, то така поверхня має нульовий об'єм.

Твердження 3. Якщо поверхня, що обмежує тіло Ф, складається зі скінченної кількості поверхонь нульового об'єму (наприклад із поверхонь твердження 2), то вона має нульовий об'єм.

З точки зору математики поверхнею обертання є результат обертання деякої кривої, заданої на площині, навколо осі (вісь повинна лежати на тій же площині). Отримана поверхня обертання розташовується в тривимірному просторі. Тіло обертання є результатом обертання деякої двовимірної області навколо осі.

У Wolfram | Alpha можна створювати найрізноманітніші поверхні і тіла обертання, а також обчислювати їх об'єми, використовуючи різні функції, осі і параметри обертання. Наприклад:

```
WolframAlpha[
 "sin[x] rotated about the axis y=10-x from x=0 to 22"]
```

Input interpretation:

surface of revolution	$y = \sin(x)$	$x = 0$ to 22	about the line $y = 10 - x$

Parametric representation of surface:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(\theta)(x_0 + \sin(x_0) - 10) + x_0 - \sin(x_0) + 10) \\ \frac{1}{2}(\cos(\theta)(x_0 + \sin(x_0) - 10) - x_0 + \sin(x_0) + 10) \\ \frac{\sin(\theta)(x_0 + \sin(x_0) - 10)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

for $0 < x_0 < 22$ and $0 < \theta < 2\pi$

Area of surface:

$$\int_0^{22} 2\pi \left| -10 + \frac{-10 + x + \sin(x)}{\sqrt{2}} \right| \sqrt{1 + \cos^2(x)}\, dx = 1551.85$$

$|z|$ is the absolute value of z »

Parametric representation of solid:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\rho\cos(\theta)(x_0 + \sin(x_0) - 10) + x_0 - \sin(x_0) + 10) \\ \frac{1}{2}(\rho\cos(\theta)(x_0 + \sin(x_0) - 10) - x_0 + \sin(x_0) + 10) \\ \frac{\rho\sin(\theta)(x_0 + \sin(x_0) - 10)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

for $0 < x_0 < 22$ and $0 < \theta < 2\pi$ and $0 < \rho < 1$

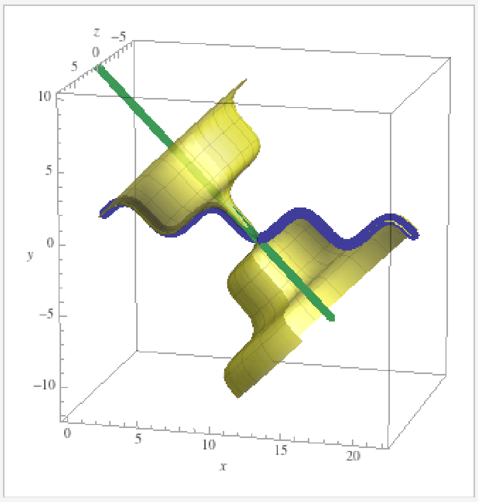
Volume of solid:

$$\int_0^{22} \frac{\pi(1 - \cos(x))(-10 + x + \sin(x))^2}{2\sqrt{2}}\, dx = 1044.7$$

Plot:

amount of rotation

Show solid



WolframAlpha

Література

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2 / [Г. М. Фихтенгольц]; Пред. и прим. А. А. Флоринского. — 8-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 864 с.