Хомутовський Олег,
студент IV курсу, спеціальність “Інформатика”*
Науковий керівник – Кривонос О. М.,
кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики та інформатики
Житомирський державний університет імені Івана Франка

ЧИСЛА СТІРЛІНГА, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

В останні десятиріччя особливо актуальними стали об’єкти і методи дискретної математики, що пов’язано з можливістю застосування ЕОМ в цій сфері наукової діяльності. Замінивши визначений інтеграл скінченними сумами, а диференціальні рівняння – різницевими, людина перейшла від банальних і екологічно небезпечних випробувань новітніх технологій до їх комп’ютерного моделювання з наступним аналізом можливих наслідків в суспільстві та природі, зберігши при цьому засоби математики основними в природознавстві. Але, навіть такі аргументи не дозволяють сказати, що сучасна студентська молодь вільно володіє об’єктами дискретної математики та теорії ймовірностей, не говорячи вже за учнів загальноосвітніх шкіл.

Розглянемо більш детально на прикладі чисел Стірлінга.

Числа Стірлінга виступають в двох різновидах, виділяють "числа Стірлінга першого і другого роду". *Числом Стірлінга другого роду* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ позначається кількість способів розбиття множини з n елементів на k непорожніх підмножин (або, за потреби, кількість способів розкласти n різних предметів в k однакових мішків так, щоб жоден з мішків не залишився порожнім). У даній роботі нас будуть більшою мірою цікавити числа Стірлінга першого роду, тому на них зупинимося більш детально. *Числом Стірлінга першого роду* $\left[{n \atop k} \right]$ позначається кількість способів подання n об'єктів в вигляді k циклів (або кількість способів посадити n чоловік з номерами на майках за k однакових круглих столів так, щоб за кожним столом хтось сидів). Зауважимо, що нам важливий порядок, в якому вони розташовані, на відміну від другого роду. Виходячи з цього, наприклад, можна довести, що для будь-яких *n* і *k* виконується $\left\{ n \atop k \right\} \le \left[n \atop k \right]$. Розглянемо тепер перестановку, яка переводить 123456789 в 384729156. Для наочності її можна уявити в двох рядках:

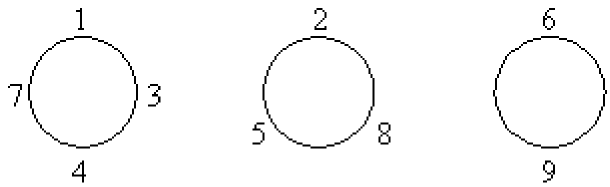
123456789

384729156

звідки видно, що 1 переходить в 3, 2 переходить в 8 і т.д. Виникає циклічна структура, бо число 1 переходить в 3, яке переходить в 4, яке переходить в 7, яке переходить назад в 1, тобто, це цикл [1,3,4,7]. Іншим циклом в цій перестановці є [2,8,5], ще одним – [6, 9]. Таким чином, перестановка 384729156 еквівалентна циклічному поданню, що складається з трьох циклів:

[1,3,4,7] [2,8,5] [6, 9]

Аналогічне до цього розбиття розсадження людей за столами:



Тепер виведемо рекурентну формулу для обчислення чисел Стірлінга першого роду. Розділимо варіанти розсадження *n* чоловік за *k* столів на дві групи:

I. *n*-а людина сидить за окремим столом;

II. *n*-а людина сидить за одним столом ще з ким-небудь.

Тоді зрозуміло, що кількість варіантів групи I дорівнюватиме $\left[n-1 \atop k-1 \right]$. Щоб розсадити людей II-им способом, потрібно спочатку розсадити *n* - 1 людину за *k* столів ($\left[n-1 \atop k \right]$ варіантів), а потім посадити до них *n*-у людину (*n* - 1 варіант, кожен з яких є способом вибрати його лівого сусіда). Таким чином, загальна кількість варіантів буде:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Використовуючи дану рекурентну формулу легко отримати кілька перших чисел Стірлінга:

n	$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Розглянемо декілька відомих властивостей чисел Стірлінга. Після заміни змінної x на $-x$ отримуємо зв'язані між собою звичайні і факторіальні степені:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^k \quad (n \geq 0),$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k \quad (n > 0).$$

Для функцій $f(n)$ і $g(n)$, визначених на множині цілих невід'ємних чисел справедливими є обернені співвідношення

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^k f(k) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^k g(k).$$

При підстановці одного з рівнянь в інше отримаємо ортогональне співвідношення для чисел Стірлінга 1-го і 2-го роду

$$\sum_k \left\{{n \atop k}\right\}\left[{m \atop k}\right](-1)^{n-k} = \sum_k \left[{n \atop k}\right]\left\{{m \atop k}\right\}(-1)^{n-k} = \sigma_{mn} = \begin{cases}1, & m = n,\\ 0, & m \neq n,\end{cases}$$

рівносильні.

Експонентні похідні функції послідовності $\left\{{n \atop k}\right\}$ і $\left[{n \atop k}\right]$ ($k = n, n+1, n+2, \ldots$) мають наступний вигляд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{{n \atop k}\right\}\frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z - 1)^k}{k!},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[{n \atop k}\right]\frac{z^n}{n!} = \frac{\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^k}{k!}.$$

За допомогою чисел Стірлінга можна отримати явне представлення для чисел Бернуллі:

$$\sum_k \left\{{m \atop k}\right\}\left[{k+1 \atop n}\right]\frac{(-1)^{k+1-n}}{k+1} = \quad (n > 0).$$

Наступним кроком нашого дослідження буде створення програми на мові С для автоматичного обчислення чисел Стірлінга 1-го роду.

Список використаних джерел та літератури:

1. Айерленд К., роузен М. *Классическое введение в современную теорию чисел*. – М.: Мир, 1987.
2. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. *Теория чисел*. – М.: Наука, 1985.
3. Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. *Конкретная математика. Основание інформатики*. – М.: Мир, 1998.