УДК 510.3

Жалдак А. В.
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Міри множин та їх визначення

Анотація. В статі розглядаються питання, що стосуються поняття міри множин, які вивчаються в курсах математики, фізики та інших дисциплін в середніх і вищих педагогічних навчальних закладах.

Ключові слова: міри множин, прості фігури, внутрішня міра, множини точок, зовнішня міра множини точок.

З проблемами вимірювання тих чи інших величин доводиться мати справу під час вивчення багатьох явищ навколишнього світу. Це оцінювання певних числових характеристик різноманітних об'єктів – довжин лінійних одновимірних фігур, площ плоских двохвимірних фігур, об'єктів просторових тривимірних тіл, маси тіл, кількості елементів у скінчених множинах, ймовірностей випадкових подій і т. д.

На практиці для визначення таких характеристик використовують певні еталонні одиниці вимірювання: для вимірювання довжин – кілометри, метри, сантиметри, міліметри, мікрони та їх ще дрібніші частини, для вимірювання площ – квадратні кілометри, квадратні метри, квадратні сантиметри і т. д., для вимірювання об'єм – кубічні метри, кубічні сантиметри і т. д., для вимірювання маси різноманітних тіл – тони, центнери, кілограми, грами, міліграми і т. д.

Разом з тим не завжди буває необхідним, а часом і неможливо визначати вказані характеристики вимірюваних об'єктів з високою точністю. Наприклад віддаль між певними населеними пунктами вимірюють з точністю до кілометрів, довжину і ширину кімнати – до метрів, довжину відрізка тканини до сантиметрів і т. д., вагу видобутого вугілля – до тон, вагу зібраного врожаю зернової культури з одного гектара – до центнерів, вагу ящика яблук – до кілограмів, вагу складових лікарських препаратів – до грамів чи навіть міліграмів і т. д. Однак не виключено, що за необхідності точного вимірювання вказаних характеристик вимірюваних об'єктів доведеться одиниці вимірювання подрібнювати все більше і більше до як завгодно малих, близьких до нульових, значень.

На практиці найчастіше вказані величини вимірюють з певною (можливо досить високою) точністю. В такому разі визначають найбільшу кількість еталонних одиниць, сумарна міра яких не перевищує шукану міру вимірюваного об'єкта, яку назвемо *внутрішньою мірою* вимірюваного об'єкта, а також найменшу кількість еталонних одиниць, сумарна міра яких перевищує шукану міру вимірюваного об'єкта, яку назвемо *зовнішньою мірою* вимірюваного об'єкта, і міру вимірюваного об'єкта покладають рівною значенню, яке знаходиться між значеннями внутрішньої та зовнішньої міри вимірюваного об'єкта (найчастіше беруть середнє арифметичне внутрішньої і зовнішньої міри). Зрозуміло, що чим дрібніші еталонні одиниці, тим меншою буде різниця між зовнішньою і внутрішньою мірами вимірюваного об'єкта. В зв'язку із сказаним нагадаємо, що в підручнику з геометрії для 7-9 класів означення площі плоскої фігури вводиться слідуючим чином. Перш за все зауважуються, що всяка фігура складається із точок, тобто всяка фігура розглядається як множина точок. Далі вводиться поняття *простої фігури* – це трикутники, прямокутники, або квадрати, міра яких може бути як завгодно малою, аж до нуля. Причому міра такої фігури визначається однозначно за відповідним означенням. (Наприклад площа прямокутника покладається рівною добутку його вимірів – ширини і висоти і. т. д.) [1]. Будь яка фігура, складена із вказаних простих фігур, також називається простою. Міра простої фігури дорівнює сумі мір її складових.

Якщо фігура G не є простою, і знайдуться такі прості фігури G_* − така, що $G_* \subset G$, і G^* − така, що $G \subset G^*$, і різниця мір фігур G^* і G_* дорівнює нулеві, тоді міра фігури G покладається рівною мірі фігури G^* або мірі фігури G_* [1], [2].

Надалі міру фігури G позначатимемо символами $m(G)$, відповідно міри фігур G^* і G_* символами $m(G_*)$ та $m(G^*)$ [4], [6], [7]. Зауважимо, що міра m є функцією, аргументами якої є множини точок або деяких елементів. Очевидно функція $m(G)$, аргументом якої є множина G, задовольняє такі вимоги (аксіоми):

$1_{m.}$. $m(G) \geq 0$, тобто функція $m(G)$ невід'ємна;

2_m. Якщо множину G поділити на частини $Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_k$ без спільних точок, тобто $G=\bigcup_{i=1}^{k} Q_i$, $Q_i \cap Q_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, і міри $m(Q_i)$ визначені, то $m(G)=m(\bigcup_{i=1}^{k} Q_i)=\sum_{i=1}^{k} m(Q_i)$ [1], [2].

Якщо задано деяку множину $\Omega=\bigcup_{i=1}^{m} H_i$, $H_i\, H_j=\varnothing$, коли $i\neq j$, і задані міри $m(H_i)$ множин H_i, $i\in\overline{1,m}$, тоді для довільної множини G її міру наближено визначають за формулою

$$m(G)\approx m(G_*)+\alpha(m(G^*)-m(G_*)),\ \alpha\in[0,1], \tag{1}$$

де $G_* = \bigcup_{\bigcup H_i \subset G\bigcap\Omega}(\bigcup H_i)$ − найширше із всіх об’єднань виду $\bigcup H_i$ таких, що $\bigcup H_i \subset G\bigcap\Omega$, тобто таких об’єднань $\bigcup H_i$, які входять в множину $G\bigcap\Omega$, $G^* = \bigcap_{G\bigcap\Omega\subset\bigcup H_i}(\bigcup H_i)$, найвужче об’єднання із всіх об’єднань виду $\bigcup H_i$, до яких входить $G\bigcap\Omega$, тобто перетин всіх об’єднань виду $\bigcup H_i$, таких, що $G\bigcap\Omega\subset\bigcup H_i$, тобто таких об’єднань $\bigcup H_i$, які охоплюють множину $G\bigcap\Omega$. Іншими словами, $G_* = \bigcup_{\bigcup H_i \subset G\bigcap\Omega}(\bigcup H_i)$ − найширше об’єднання множин H_i, яке входить в перетин $G\bigcap\Omega$ множин G і Ω, $G^* = \bigcap_{G\bigcap\Omega\subset\bigcup H_i}(\bigcup H_i)$ − найвужче об’єднання множин H_i, яке охоплює множину $G\bigcap\Omega$.

Крім того, мається на увазі, що за необмеженого подрібнення множин H_i, коли $m(H_i)\to 0$, $\lim\limits_{m(H_i)} m(G_*)=\lim\limits_{m(H_i)}(G^*)=m(G)\cdot$

Зрозуміло, що коли $G\bigcap\Omega=\varnothing$, тоді $G_*=\varnothing$, $G^*=\varnothing$, $m(G_*)=0$, $m(G)=0$, а коли $G\bigcap\Omega=\Omega$, тоді $G_*=\Omega$, $G^*=\Omega$, $m(G)=m(\Omega)$, $m(G\setminus\Omega)=0$, оскільки в останньому випадку $(G\setminus\Omega)\bigcap\Omega=\varnothing$, а тому $\bigcup H_i\subset(G\setminus\Omega)\cap\Omega=\varnothing$, $\bigcup H_i\supset(G\setminus\Omega)\cap\Omega=\varnothing$.

В разі, коли $G\subset\Omega$, тоді $0\le m(G_*)\le m(G)\le m(G^*)\le m(\Omega)$.

В розглянутому випадку вважається, що міра всіх множин, які не перетинаються з множиною Ω, дорівнює нулеві, тобто міра задана лише на всеможливих об’єднаннях $\bigcup_{i\in I} H_i\subset\Omega$, $I\subset\{1,2,\ldots,m\}$, підмножин H_i, і такі об’єднання в свою чергу є підмножинами множини Ω. Зокрема не виключається, що $I=\varnothing$. В такому разі $\bigcup_{i\in I} H_i=\varnothing$. Міра такого об’єднання покладається рівною нулеві. Фізичне тлумачення останнього положення може бути таким. Нехай є k пакунків H_i прямокутної форми, в кожному з яких запакована маса $m(H_i)$ деякої речовини. Розміри пакунків не обов’язково однакові. Розкривати пакунки і ділити на частини наявну в них масу запакованої там речовини не дозволяється. Всі ці k пакунків розміщені поруч якомога щільніше на площині так, щоб заповнити на цій площині її частину прямокутної форми (див. Рис.1), яку позначимо через Ω.

Якщо тепер розглядається інша частина площини, яку позначимо через G (див. Рис.1), то коли $G\bigcap\Omega=\varnothing$, на такій частині площини не знаходиться жоден пакунок, і тому маса вказаної речовини, що знаходиться в пакунках, розміщених цілком всередині множини G, буде нульова, оскільки жоден пакунок не розміщений повністю в межах множини G. Якщо ж $G\bigcap\Omega\neq\varnothing$, тоді також не виключено, що в межах множини $G\bigcap\Omega$ не буде повністю розміщений жоден пакунок. Всі пакунки, які повністю входять в множину G, відносяться до множини G_*. На Рис. 1 множина G_* заштрихована.

Найменша кількість пакунків, об’єднання яких накриває частину площини, в якій цілком вміщується множина $G\bigcap\Omega$, відноситься до множини G^*.

Зрозуміло, що $G_*\subset G\bigcap\Omega\subset G^*$.

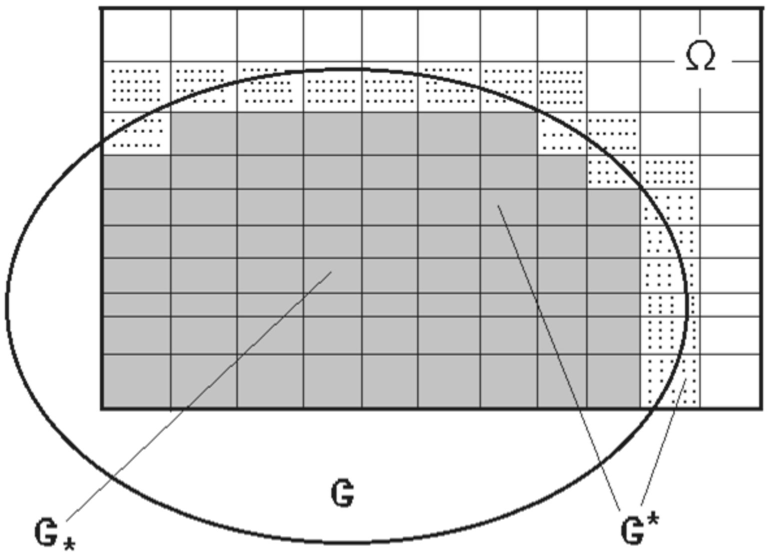

Рис. 1

На Рис. 1 до множини G^* відносяться всі пакунки з множини G_* (заштриховані прямокутники), а також прямокутники, помічені точками (такі помічені точками прямокутники відносяться до множини $G^* \setminus G_*$).

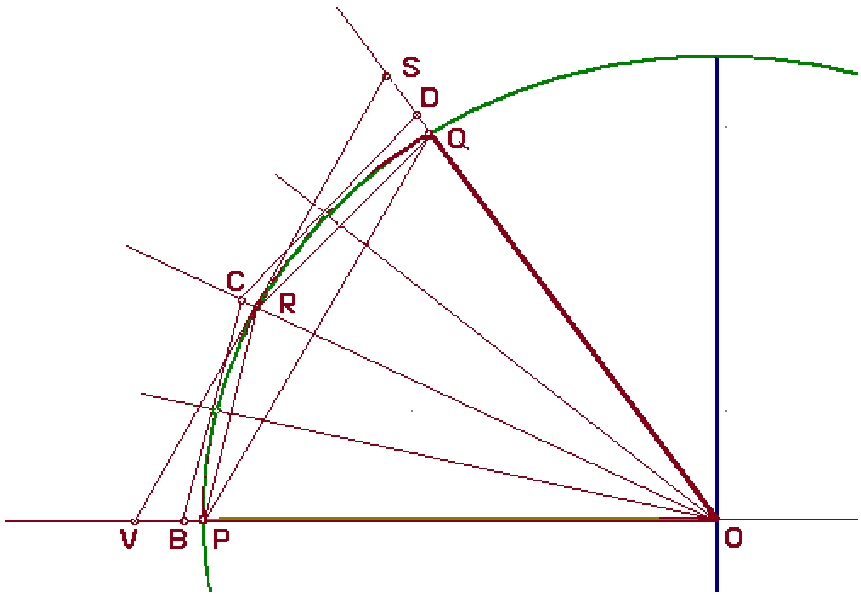

Рис. 2.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай потрібно обчислити площу кругового сектора, що визначається через центральний кут POQ круга радіуса r. Поділимо кут POQ на деяку кількість n рівних між собою кутів. Очевидно множина G точок даного сектора є підмножиною об'єднання G^* множин внутрішніх точок рівнобедрених трикутників, бічні сторони яких є продовженнями радіусів, через які визначається кут з вершиною O, а висотами є радіуси, що опущені із вершини O до точки дотику основи трикутника на його основі (див. Рис. 2, трикутники BOC, COD з основами відповідно BC, CD і висотами, рівними радіусу заданого кола). Позначимо величину кута POQ через φ. Тоді величини кутів з вершиною O трикутників, з внутрішніх точок яких утворено множину G^*, дорівнюють $\frac{\varphi}{n}$. В такому разі міра множини G^* (сума площ трикутників, з яких складено множину G^*) буде дорівнювати

$$m(G^*) = n \cdot \frac{1}{2} r (2rtg\frac{\varphi}{2n}) = nr^2 tg\frac{\varphi}{2n} = nr^2 \frac{\sin\frac{\varphi}{2n}}{\cos\frac{\varphi}{2n}} = r^2 \frac{\sin\frac{\varphi}{2n}}{\frac{\varphi}{2n}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2n}} \cdot \frac{\varphi}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\varphi r^2}{2}.$$

Множина G_* в розглядуваному випадку буде множиною внутрішніх точок трикутників з вершинами в точці O і основами, що є хордами, які з'єднують точки на колі, що є кінцями радіусів, через які визначаються кути величиною $\frac{\varphi}{n}$ (див. Рис. 2, трикутники POR, ROQ з основами відповідно PR, RQ). Міра такої множини G_* буде дорівнювати

$$m(G_*) = n\frac{1}{2}(r\sin\frac{\varphi}{2n})\cdot 2\cdot r\cos\frac{\varphi}{2n} = r^2\frac{\sin\frac{\varphi}{2n}}{\frac{\varphi}{2n}}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2n}\cdot\varphi = \frac{1}{2}\varphi r^2\frac{\sin\frac{\varphi}{2n}}{\frac{\varphi}{2n}}\cos\frac{\varphi}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\varphi r^2}{2}.$$

Очевидно $G_* \subset G \subset G^*$ за будь якого n, тому $m(G_*) \le m(G) \le m(G^*)$.

Поклавши згідно з формулою (1)

$m(G) = m(G_*) + \alpha(m(G^*) - m(G_*)),\ \alpha\in[0,1]$, одержимо наближенне значення площі вказаного сектора.

Оскільки

$$m(G^*) - m(G_*) = \frac{1}{2}\varphi r^2\frac{\sin\frac{\varphi}{2n}}{\frac{\varphi}{2n}}\left(\frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2n}} - \cos\frac{\varphi}{2n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ m(G_*)n\xrightarrow[\to\infty]{}\frac{1}{2}\varphi r^2,\text{ то } m(G) = \frac{\varphi r^2}{2}.$$

Зокрема коли $\varphi = 2\pi$, тоді $m(G) = \pi r^2$. Тобто площа круга G, обмеженого колом радіуса r, дорівнює $m(G) = \pi r^2$.

Приклад 2. На колі радіуса r потрібно визначити довжину дуги між заданими на колі точками V і S (див. Рис. 3)

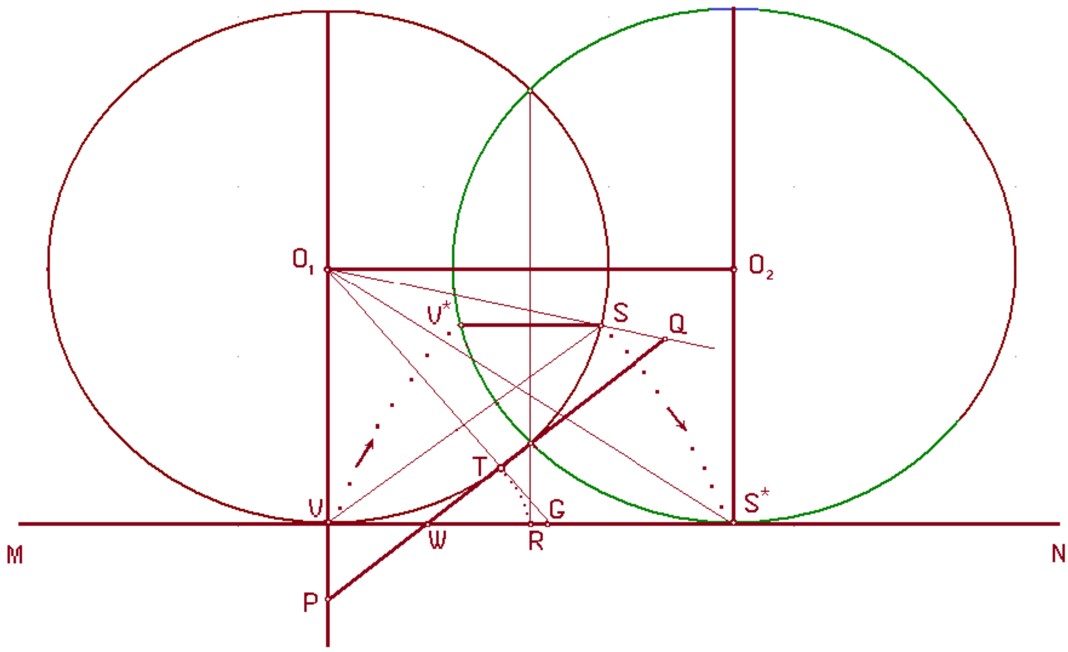

Рис. 3.

Визначити довжину такої дуги можна за двома способами. За першим – котити коло радіуса r вздовж прямої MN від його початкового положення, коли коло дотикається прямої MN в точці V, і в такому разі радіус $O\,V$ перпендикулярний до прямої MN, до кінцевого положення, коли центр кола з точки O_1 переміститься в точку O_2 і точка S переміститься в точку S^* таку, що радіус O_2S^* буде перпендикулярним до прямої MN. В такому разі довжина відрізка VS^* буде дорівнювати довжині дуги кола між точками V і S, і тому відрізок VS^* буде спрямленим еквівалентом вказаної дуги.

Очевидно, що коли котити коло вздовж прямої MN, то кожна попередня точка дотику кола до прямої піднімається над прямою вище, ніж наступні точки дотику за умови, що довжина дуги між точками V і S не перевищує довжини половини кола. Нехай точка R – середина відрізка VS^*, а G – точка перетину продовження радіуса O_1T з прямою MN (див. Рис.3). Очевидно (див. Рис.3), що

$VR < VG$. Звідси зокрема випливає нерівність $\varphi < tg\varphi$ (кут φ вимірюється через довжину дуги кола, на яку він спирається).

За другим способом – переміщувати (повертати без ковзання так, щоб пряма весь час дотикалась до кола) вздовж кола відрізок прямої без ковзання так, що спочатку ця пряма дотикається до кола в точці V, а в кінцевому положенні дотикається до кола в точці S (див. Рис. 4). Відмітимо міткою R на прямій точку, в якій пряма перед переміщенням дотикалась до кола в точці V, а міткою T точку на прямій, в якій пряма буде дотичною до кола в точці S (див. Рис. 4). Тоді довжина відрізка RT буде дорівнювати довжині дуги кола між точками V і S, і тому відрізок RT буде спрямленим еквівалентом дуги кола між точками V і S.

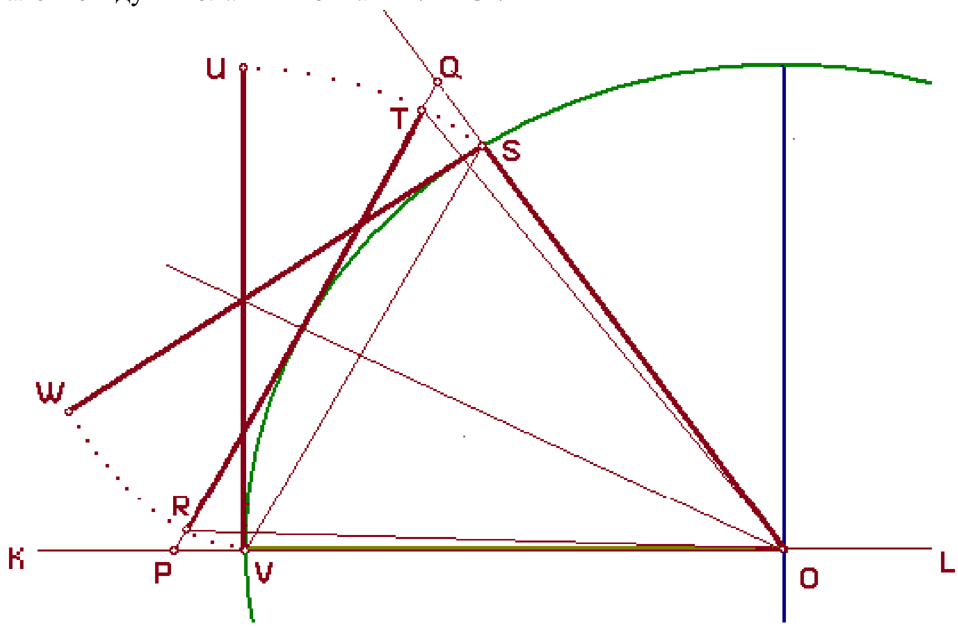

Рис. 4

Позначимо через φ величину кута VOS (рівного кутові POQ), а через α величину кута ROT. Оскільки в процесі вказаного переміщування відрізка RT кінець R відрізка RT піднімається вгору над прямою KL (див. Рис. 4), то кут ROT менший від кута POQ, тобто $\alpha < \varphi$.

Тому $RT = 2rtg\frac{\alpha}{2} < 2rtg\frac{\varphi}{2} = PQ$. З іншого боку $VS = 2r\sin\frac{\varphi}{2} < RT$, оскільки відрізок прямої між точками V і S на цій прямій коротший за дугу кола, якою з'єднуються точки V і S.

Відкладаємо відрізки такої самої довжини, як VS, RT і PQ, на одній і тій самій прямій KL так, щоб їх початкові точки співпадали з однією і тією самою точкою на прямій KL, і позначимо так утворені множини точок на прямій KL через G_*, G, G^* відповідно. Тоді матиме місце виключення $G_* \subset G \subset G^*$. Зауважимо, що дугу кола між точками V і S на прямій розмістити неможливо, і тому неможливо стверджувати, що множина точок такої дуги є підмножиною множини точок деякого відрізка, або що множина точок деякого відрізка є підмножиною множини точок вказаної дуги.

Поділимо тепер кут φ на n частин, для кожного кута $\frac{\varphi}{n}$ визначимо відрізки всіх трьох типів VS, RT, PQ, і відкладемо на деякій прямій, починаючи від деякої точки O, спочатку всі відрізки типу VS один за одним так, що кінець кожного відрізка є початком наступного, потім починаючи від тієї самої точки O відкладемо всі відрізки типу RT аналогічно до попереднього, і далі так само починаючи від точки O відкладемо всі відрізки типу PQ. Позначимо об'єднання множин точок відрізків типу VS через G_*, об'єднання множин точок відрізків типу RT через G, об'єднання множин точок відрізків типу PQ - через G^*. Очевидно $G_* \subset G \subset G^*$.

Оскільки $m(G_*) = n2r\sin\frac{\varphi}{2n} = n2r\frac{\sin\frac{\varphi}{2n}}{\frac{\varphi}{2n}}\cdot\frac{\varphi}{2n} = \varphi r\frac{\sin\frac{\varphi}{2n}}{\frac{\varphi}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi r$,

$$m(G^*) = n2rtq\frac{\varphi}{2n} = n2r\frac{\sin\frac{\varphi}{2n}}{\cos\frac{\varphi}{2n}}\cdot\frac{\frac{\varphi}{2n}}{\frac{\varphi}{2n}} = \varphi r\frac{\sin\frac{\varphi}{2n}}{\frac{\varphi}{2n}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi r,$$

то коли $n \to \infty$, тоді $m(G) = m(G_*) + \alpha(m(G^*) - m(G_*)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi r, \quad \alpha \in [0,1]$.

Зокрема, коли $\varphi = 2\pi$, тоді $m(G) = 2\pi r$, Тобто довжина кола радіуса r (міра множини G точок кола) дорівнює $m(G) = 2\pi r$.

Приклад 3. Нехай потрібно обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої знизу прямою $y = 0$, зверху кривою, що визначається за рівнянням $y = f(x)$, ліворуч прямою $a = x$, праворуч прямою $x = b$.

Поділимо проміжок $[a;b]$ на деяке число k часткових проміжків $[a_{i-1};a_i]$, $i \in \overline{1,k}$, $a_0 = a$, $a_i - a_{i-1} = h = \dfrac{b-a}{k}$, і знайдемо на кожному проміжкові $[a_{i-1};a_i]$ найменше $\min\limits_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x) = p_i$ і найбільше $\max\limits_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x) = q_i$ значення функції $f(x)$.

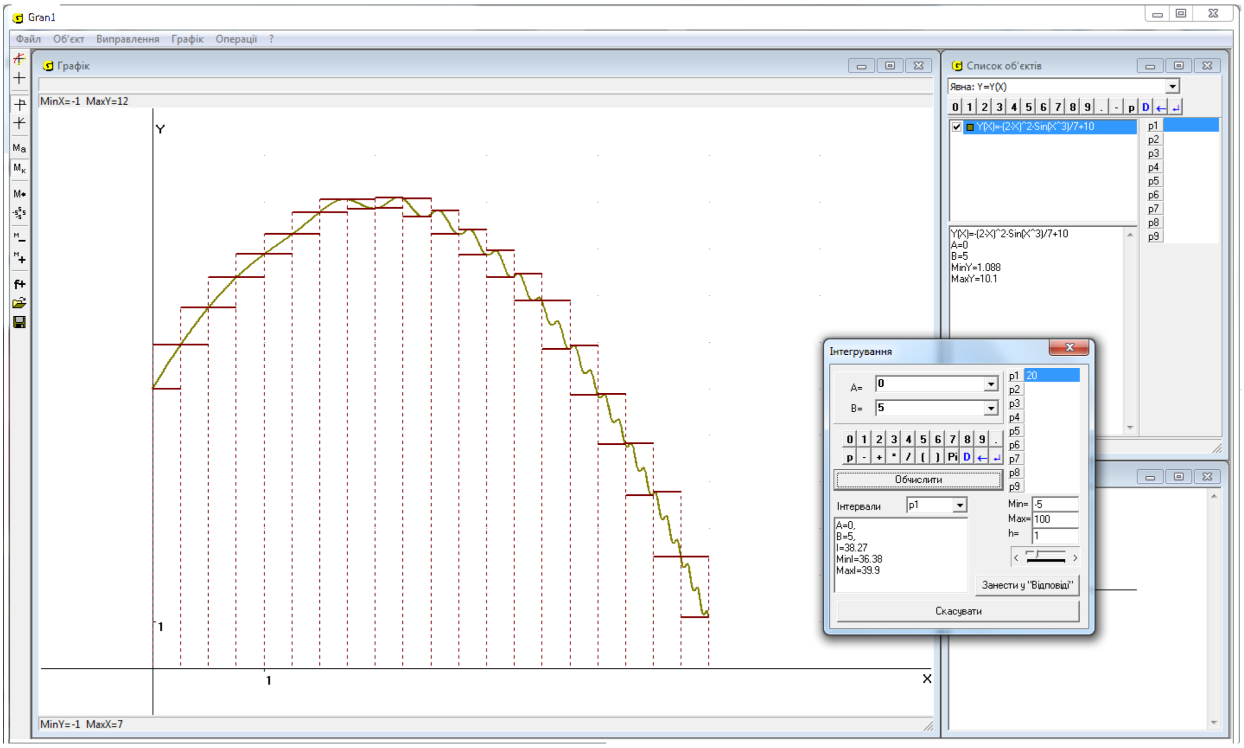

Рис. 5.

Позначимо об'єднання прямокутників з основами $[a_{i-1}, a_i]$ і висотами $p_i = \min\limits_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)$, $i \in \overline{1,k}$, через G_*, об'єднання прямокутників з основами $[a_{i-1}, a_i]$ і висотами $q_i = \max\limits_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)$, $i \in \overline{1,k}$, через G^*, мн ожину точок вказаної трапеції – через G. Очевидно, $G_* < G < G^*$. Легко бачити, що $m(G_*) = \sum\limits_{i=1}^{k} \min\limits_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)\cdot(a_i - a_{i-1})$ (нижні суми Дарбу), $m(G^*) = \sum\limits_{i=1}^{k} \max\limits_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)\cdot(a_i - a_{i-1})$ (верхні суми Дарбу) (див. Рис.5). Покладемо $m(G) = m(G_*) + \alpha\left(m\left(G^*\right) - m\left(G_*\right)\right)$, $\alpha \in [0,1]$. Тоді одержимо $m(G_*) \le m(G) \le m(G^*)$.

Можна показати, що із подрібненням проміжків $[a_{i-1}, a_i]$ міри $m(G_*)$ (нижні суми Дарбу) не зменшуються, а міри $m(G^*)$ (верхні суми Дарбу) не збільшуються, і коли

$h = a_i - a_{i-1} = \dfrac{b-a}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, тоді $m(G^*) - m(G_*) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $m(G^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} m(G_*)$. Так визначену міру множини G (площу криволінійної трапеції G) позначають символами $\int_a^b f(x)dx$ і називають інтегралом Рімана від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Нагадаємо, що коли міра m, задана на сукупності S підмножин множин Ω, окрім вимог 1_m, 2_m, задовільняє ще вимогу $m(\Omega)=1$, тоді таку міру називають ймовірнісною мірою або просто ймовірністю, заданою на сукупності S підмножин множини Ω (див.[4]).

Нагадаємо також, що статистичною ймовірністю або відносно частотою події Aназивається відношення $P_n^*(A) = \dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}$ кількості $k_n(A)$ відбувань події A до кількості $k_n(\Omega)$ проведених випробувань (див. [4]).

Приклад 4. Нехай на одновимірній множині $\Omega = [a,b]$ задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей через усереднену щільність такого розподілу (див. [4]):

$$f_n^*(x) = \begin{cases} c_i, \textit{коли}\, x \in [a_{i-1},\, a_i],\ i \in \overline{1,k} \\ 0,\ \textit{коли}\, x \overline{\in} [a_0,\, a_k) \end{cases}$$

де $a_0 = a$, $a_k = b$, $a_i - a_{i-1} = h = \dfrac{b-a}{k}$, $i \in \overline{1,k}$ (див. Рис.6).

Якщо простір подій $S = \left\{ A \mid A = \bigcup\limits_{i\in I} [a_{i-1}, a_i),\ I \subset \{1, 2,..., k\} \right\}$, зокрема не виключається, що $I = \varnothing$, тоді для довільного $A \in S$ буде

$$P_n^*(A) = \sum_{[a_{i-1},a_i)\subset A} P_n^*([a_{i-1},a_i)) = \sum_{[a_{i-1},a_i)\subset A} c_i \cdot (a_i - a_{i-1}) = \sum_{[a_{i-1},a_i)\subset A} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx .$$

Зауважимо, що сукупність S задовольняє такі вимоги (див. [4]):

1_s. $\Omega \in S$;

2_s. із того, що $\mathrm{A} \in S$, слідує, що $\overline{\mathrm{A}} \in \Omega \setminus A \in S$;

3_s. із того, що $\mathrm{A}_i \in S$, слідує, що $\bigcup\limits_i A_i \in S$.

Якщо тепер розглядається деяка множина $\tilde{\Omega}$, ширша, ніж Ω, тобто $\Omega \subset \tilde{\Omega}$, і сукупність $\tilde{S}$ підмножин множини $\tilde{\Omega}$ ширша, ніж S, тобто $S \subset \tilde{S}$, причому $\tilde{S}$ також задовольняє вимоги 1_s-3_s.

1_s. $\tilde{\Omega} \in \tilde{S}$;

2_s. із $\mathrm{A} \in \tilde{S}$ слідує $\overline{\mathrm{A}} \in \tilde{\Omega} \setminus A \in \tilde{S}$;

3_s. із $\mathrm{A}_i \in \tilde{S}$ слідує $\bigcup\limits_i A_i \in \tilde{S}$,

то коли деяка множина $G \in \tilde{S}$, однак $G \overline{\in} S$, визначити ймовірнісну міру множини G, виходячи із наявних даних, неможливо.

В такому разі узагальнену ймовірнісну міру множини $G \in \tilde{S}$ наближено визначають за допомогою ймовірнісних мір множин $[a_{i-1}, a_i) \in \overline{S}$ наступним чином.

Знаходять найширше об'єднання інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ таке, що входить в множину $G \bigcap \Omega$ $\bigcup\limits_{[a_{i-1},a_i)\subset G\cap\Omega} (\bigcup [a_{i-1}, a_i))$, яке позначимо через G_*, а також найвужче об'єднання інтервалів $[a_{i-1}, a_i) \in \overline{S}$ таке, що охоплює множину $G \bigcap \Omega$, тобто $\bigcap\limits_{G\cap\Omega\subset\bigcup[a_{i-1},a_i)} (\bigcup [a_{i-1}, a_i))$, яке позначимо через

G^*. Очевидно $G_* \in S$, $G^* \in S$, $G_* \subset G \cap \Omega \subset G^*$, а отже міри $P_n^*(G_*)$ і $P_n^*(G^*)$ множин G_* і G^* визначені.

Покладемо $\tilde{P}_n^*(G \cap \Omega) = P_n^*(G_*) + \alpha(P_n^*(G^*) - P_n^*(G_*))$, $\alpha \in [0,1]$.

В такий спосіб ймовірнісна міра P_n^* продовжується (узагальнюється) із сукупності S підмножин множини Ω на сукупність $\tilde{S}$ підмножини множин $\tilde{\Omega}$, причому коли $G \cap \Omega = \varnothing$, тоді $P_n^*(G \cap \Omega)$=0. В такому разі вважають $P_n^*(G) = 0$.

Очевидно, коли $h = a_i - a_{i-1} = \dfrac{b-a}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, тоді $P_n^*(G^*) - P_n^*(G_*) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $P_n^*(G \cap \Omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} P_n^*(G_*)$ (а також $P_n^*(G \cap \Omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} P_n^*(G^*)$). В такому разі ймовірнісна міра $P_n^*(G)$ множини G визначається за формулою $\tilde{P}_n^*(G) = \int\limits_G f_n^*(x)dx$.

Якщо $G = (-\infty, x)$, $\tilde{S}$-сукупність підмножин виду $[x_1, x_2)$, $x_1 \in (-\infty, \infty)$, $x_2 \in (-\infty, \infty)$, тоді одержимо *функцію поінтервального розподілу узагальнених статистичних імовірностей* на множині Ω (див.[4]):

$F_n^*(x) = \tilde{P}_n^*((-\infty, x))$, де $\tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = P_n^*(G_*) + \alpha(P_n^*(G^*) - P_n^*(G_*))$, $\alpha \in [0,1]$, $P_n^*(G_*) = P_n^*(\bigcup\limits_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,x)\cap\Omega} \bigcup [a_{i-1}, a_i))$; $P_n^*(G^*) = P_n^*(\bigcap\limits_{(-\infty,x)\cap\Omega\subset\bigcup[a_{i-1},a_i)} \bigcup [a_{i-1}, a_i))$.

Якщо, наприклад, $a_{j-1} < x < a_j$, $j \in \overline{1,k}$, тоді $G_* = \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} [a_{i-1}, a_i)$, $G^* = \bigcup\limits_{i=1}^{j} [a_{i-1}, a_i)$, $\bigcup\limits_{i=1}^{j-1} [a_{i-1}, a_i) \subset (-\infty, x) \cap \Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{j} [a_{i-1}, a_i)$ (див. Рис.6).

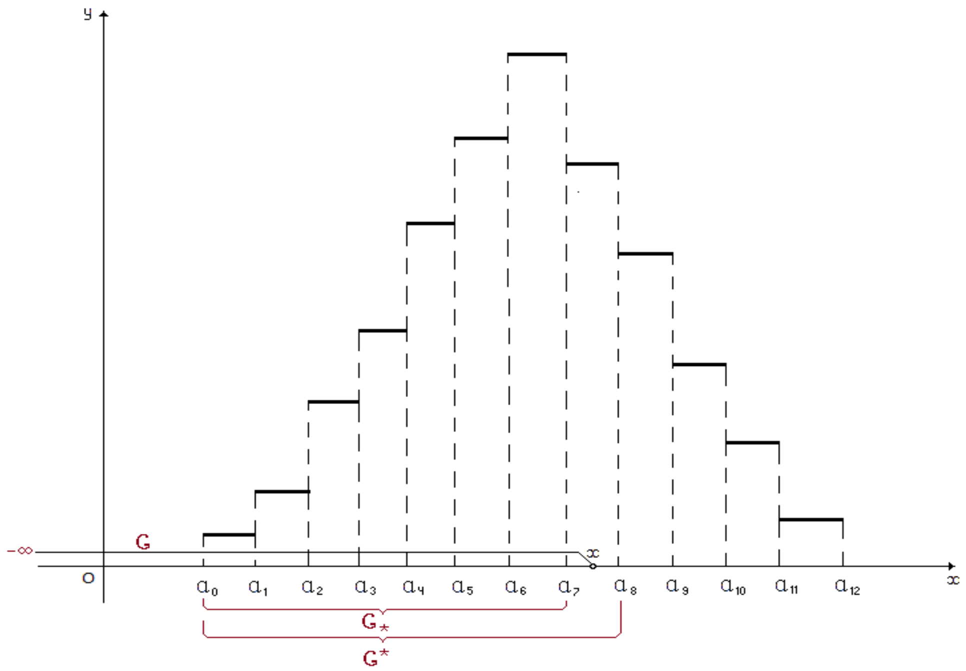

Рис. 6

Очевидно, функція $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей набуває сталих значень на кожному з проміжків $[a_{i-1}, a_i)$, і кількість таких значень не перевищує $k+2$, тобто за скінченної кількості k інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ функція $F_n^*(x)$ кусково стала. За необмеженого подрібнення інтервалів, коли $a_i - a_{i-1} = \dfrac{b-a}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, а усереднена щільність $f_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей обмежена, функція $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей збігається до неперервної кусково-лінійної функції неперервного розподілу узагальнених статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [a,b)$ (див. Рис. 7а, 7б).

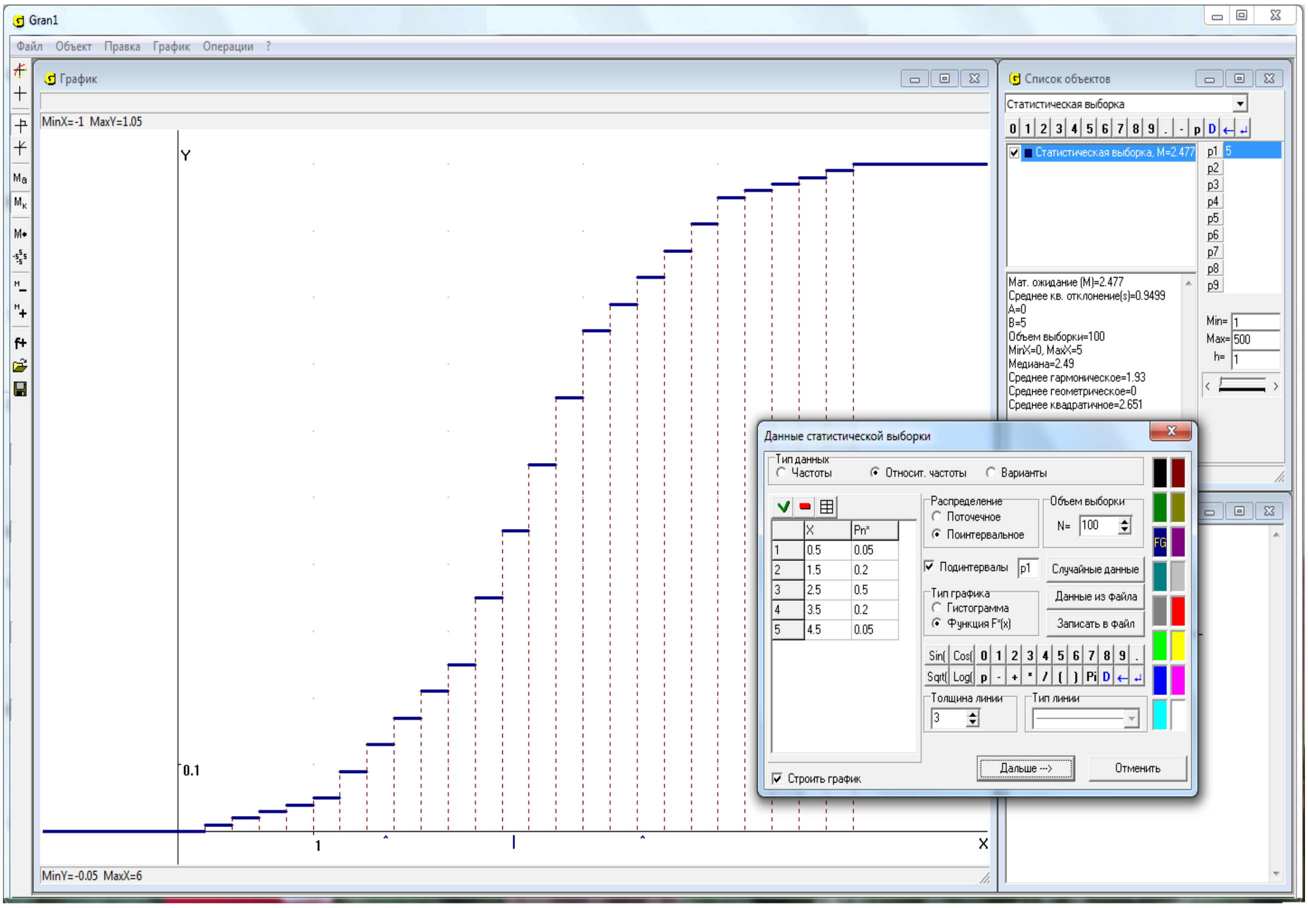

Рис. 7а

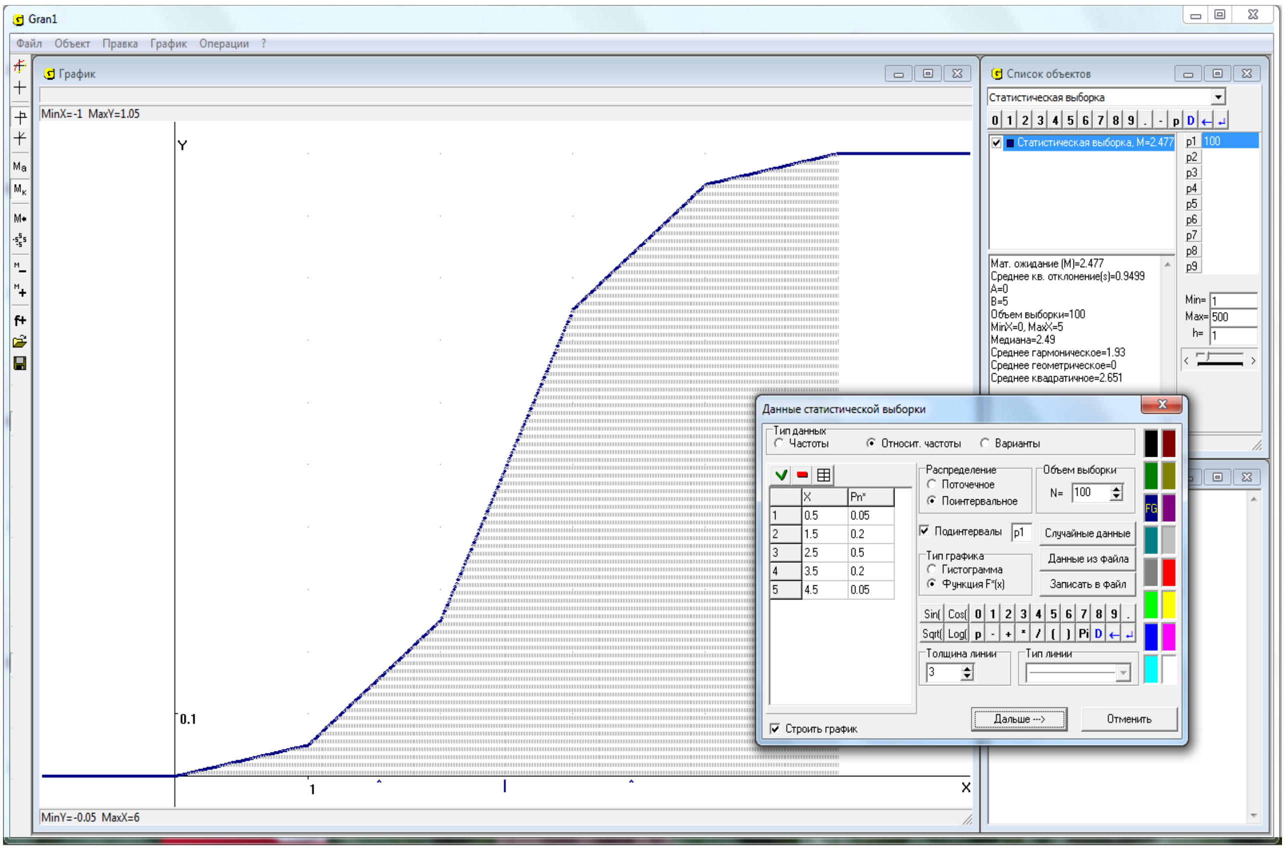

Рис. 7б

Таку неперервну функцію $F_n^*(x)$ розподілу узагальнених статистичних ймовірностей називають абсолютно неперервною, а сам розподіл статистичних імовірностей також називають абсолютно неперервним. В такому разі функцію $F_n^*(x)$ абсолютно неперервного розподілу узагальнених статистичних ймовірностей на числовій прямій можна подати у вигляді $F_n^*(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_n^*(x)dx$.

Цілком аналогічно розглядаються питання про визначення ймовірнісних мір множин із двохвимірного простору $R^2 = (-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$ за умови, що задано розподіл статистичних імовірностей на множині $\Omega = [a,b)\times[c,d)$ за підмножинами $[a_{i-1},a_i)\times(d_{j-1},d_j)$, $i \in \overline{1,k}$, $j \in \overline{1,m}$, через усереднену щільність розподілу статистичних ймовірностей див. [4]).

$$f_n^*(x,y) = \begin{cases} c_{ij}, \text{коли } (x,y) \in [a_{i-1},a_i)\times[d_{j-1},d_j), \ i \in \overline{1,k} \\ 0, \text{ коли } (x,y) \notin [a,b)\times[c,d) \end{cases}.$$

Список використаних джерел

1. Погорєлов О. В. Геометрія: Планіметрія: Підруч.для 7-9 кл. загальноосвіт. навч. закл. − 7-ме вид. – К.: Школяр, 2004. – 240 с.
2. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підруч. для 10-11 кл. серед. шк. – 6-те вид – К.: Освіта, 2001 – 128 с.
3. Ляшенко Б. М., Кривонос О. М., Вакалюк Т. А. Методи обчислень. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2014. – 228 с., іл.
4. М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін. Теорія ймовірностей і математична статистика. Підручник для студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей педагогічних університетів. Видання третє, перероблене і доповнене / М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін. – Київ. НПУ імені М.П. Драгоманова. 2015. –707 с.
5. М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. Математика з комп’ютером. Посібник для вчителів. – Видання третє, доповнене. К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 313 с.
6. М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй. Початки стохастики. Факультативний курс для учнів старшої школи. / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. – 162 с.
7. М.І. Жалдак, І.М. Біляй. Стохастика. Посібник для вчителів. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. – 302 с.

Меры множеств и их определения

Жалдак А.В.

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы, касающиеся понятия меры множеств, которые изучаются в курсах математики, физики и других дисциплин в средних и высших педагогических учебных заведениях.

Ключевые слова: мера множества, простые фигуры, внутренняя мера множества точек, внешняя мера множества точек.

Measures sets and their determination

Zhaldak A.

Resume. In questions of gender related concepts measure sets, studying courses in mathematics, physics and other disciplines in secondary and higher educational institutions.

Keywords: measure sets, basic shapes, internal measure of a set ofpoints, outer measure of a set of points.