

Т.В. Дідківська,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Л.В. Михайлова,
студентка
(Житомирський педуніверситет)

ЗОЛОТА СИСТЕМА ЧИСЛЕННЯ

Виводяться подання натуральних чисел в золотій системі числення, в основу якої покладено ірраціональне число $\varphi = 1,618\dots$, що одержується в результаті розв'язування рівняння відношення золотого перерізу. Наводиться програма мовою Pascal для реалізації запропонованого алгоритму, та вказуються шляхи введення золоті системи числення у шкільний курс математики.

Особливістю організації навчання математики в умовах реформування системи освіти є забезпечення обов'язкового рівня математичної підготовки всіх учнів, а також створення умов для навчання на більш високому рівні тим учням, які мають інтерес до математики і математичні здібності. У зв'язку з цим виникає потреба диференційованого навчання на уроці та індивідуальної роботи з учнями в позаурочний час. Саме цьому сприятиме знайомство учнів з нетрадиційними системами числення, класичним поняттям відношення золотого перерізу, а також його застосуванням для побудови золоті системи числення.

В основі прикладної арифметики лежать системи числення і пов'язані з ними способи виконання арифметичних операцій. Потреби торгівлі і обміну сприяли виникненню різних систем числення: ієрогліфічних, алфавітних, непозиційних і позиційних.

Відомо, що запис довільного числа m у системі числення з основою q – це зображення цього числа у вигляді суми степенів основи q з цілими невід'ємними коефіцієнтами, меншими ніж q :

$$m = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i q^i, \quad (1)$$

або позиційний запис $m = \dots a_{-n} a_{-n+1} \dots a_0 a_1 \dots a_n \dots$

Загальноживаною є позиційна десяткова система числення, основа якої $q=10$. Вона виникла в Індії, там її запозичили араби і потім перенесли в Європу. Але можливі системи числення з будь-якою іншою основою. Так, у Вавилоні за 2-3 тисячі років до нашої ери використовували шістдесяткову систему числення. Досить поширеною була дванадцяткова система ($q=12$ – дюжина). Найстародавнішою є двійкова система, яка знайшла застосування в ЕОМ. У сучасній арифметиці відбувається розвиток теорії систем числення, зокрема введення позиційних систем числення з ірраціональною основою, які мають переваги перед двійковою системою і тому можуть бути використані для кодування інформації.

Визначним ірраціональним числом є число, що задає відношення золотого перерізу [1:7]. Нагадаємо це означення. Нехай відрізок АВ ділиться внутрішньою точкою С на такі дві нерівні частини так, що $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$;

маємо $\frac{AC+CB}{AC} = \frac{AC}{CB}$. Позначимо відношення $\frac{AC}{CB} = X$, тоді одержуємо рівняння:

$$X^2 = X + 1, \quad (2)$$

додатній корінь якого $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618\dots$ називають відношенням золотого перерізу. При цьому більша частина $AC \approx 0,618AB$. Це відношення позначається літерою φ не випадково. Так вшановують пам'ять давньогрецького скульптора Фідія, який використовував це відношення у своїх творіннях. Оскільки $\varphi^2 = \varphi + 1$, то, домноживши цю рівність на φ^{n-2} одержуємо властивість:

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}, \quad (3)$$

яка буде використовуватись при побудові системи числення з основою $q = \varphi$.

Зручною для комп'ютерного застосування якраз є система числення, в якій розрядними одиницями є:

$$\dots \varphi^3, \varphi^2, \varphi^1, \varphi^0, \varphi^{-1}, \varphi^{-2}, \varphi^{-3} \dots \quad (4)$$

Вона має властивості [2:50]:

1. Цифрами в позиційному записі довільного числа можуть бути тільки 0 і 1, оскільки $\frac{q^{n+1}}{q^n} = \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} = \varphi$, $1 < \varphi < 2$.
2. Алгоритм додавання окремих розрядних доданків виконується за схемою: $q_n + q_{n+1} = q_{n+2}$, за властивістю (3).
3. Добуток довільних двох розрядних одиниць із (4) також є розрядною одиницею, оскільки $\varphi^n \cdot \varphi^m = \varphi^{m+n}$.
4. Довільне дійсне число можна подати в системі числення (4) з довільною точністю:

$$m = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \varphi^i, \text{ де } a_i \in \{0;1\} \quad (5)$$

Для цього необхідно поставити праворуч від коми будь-яку кількість цифр (нулів і одиниць), відповідних "від'ємним" розрядам: $\varphi^{-1}, \varphi^{-2}, \varphi^{-3}, \dots$. Причому система (4) є єдиною системою, яка має вказані властивості. Унікальність цієї системи привернула увагу конструкторів і теоретиків ЕОМ [3:47], [4:41]. Її називають золотою системою числення.

Знайдемо подання перших десяти натуральних чисел в золотій системі числення (4). Для цього будемо користуватись властивістю (3), з якої випливає, що одиниця даного розряду "розгортається" у дві одиниці двох наступних розрядів ($\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1}$). І навпаки, дві одиниці двох даних розрядів "згортаються" в одну одиницю вищого розряду ($\varphi^{n-1} + \varphi^n = \varphi^{n+1}$). Будемо називати ці операції "розгортка" і "згортка". За допомогою цих операцій знайдемо шукане подання, починаючи з числа 1 і додаючи послідовно до розряду φ^0 одиницю, зробивши його для цього нульовим.

	φ^4	φ^3	φ^2	φ^1	φ^0	φ^{-1}	φ^{-2}	φ^{-3}	φ^{-4}
$1 = a_{1i} =$	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0	0 1	0 1	0 0	0 0
$2 = a_{2i} =$	0 0	0 0	0 0	0 1	1 0	1 0	1 1	0 0	0 0
$3 = a_{3i} =$	0 0	0 0	0 1	1 0	1 0	0 0	1 1	0 0	0 0
$4 = a_{4i} =$	0 0 0	0 0 0	1 1 1	0 0 0	1 1 0	0 0 1	1 0 1	0 1 1	0 1 1
$5 = a_{5i} =$	0 0 0	0 0 1	1 1 0	0 1 0	1 0 0	1 0 1	1 1 0	1 1 0	1 1 1
$6 = a_{6i} =$	0 0	1 1	0 0	0 1	1 0	1 0	0 0	0 0	1 1
$7 = a_{7i} =$	0 0 1	1 1 0	0 1 0	1 0 0	1 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	1 1 1
$8 = a_{8i} =$	1 1	0 0	0 0	0 0	1 0	0 1	0 1	0 0	1 1
$9 = a_{9i} =$	1 1	0 0	0 0	0 1	1 0	1 0	1 1	0 0	1 1
$10 = a_{(10)i} =$	1 1	0 0	0 1	1 0	1 0	0 0	1 1	0 0	1 1

Маємо, що в золотій системі числення натуральні числа мають цілу і дробову частину, наприклад, $10=10100,0101$, а ірраціональні числа, зокрема $\varphi^2 = 100$, $\varphi=10$, можуть не мати дробової частини. Подання чисел в золотій системі числення визначається неоднозначно. Маємо: $10=10011,0101=10100,0101$; $9=10001,1101=10010,0101$ і т.д. Виділимо з усіх можливих подань одного і того ж числа таке, що в довільній групі з двох цифр, які стоять поряд, зустрічається не більше ніж один одиничний елемент. Таке подання будемо називати нормальним. Доведемо існування і єдиність нормального подання.

Теорема. Існує єдине подання довільного дійсного числа у вигляді:

$$m = \varphi^n + r, \text{ де } 0 \leq r < \varphi^{n-1} \quad (6)$$

Доведення: Оскільки члени ряду (4) монотонно спадають, то для довільного дійсного числа m можна знайти такі два числа φ^n і φ^{n+1} , що $\varphi^n \leq m < \varphi^{n+1}$. Звідси випливає, що $m = \varphi^n + r$. Маємо: $r = m - \varphi^n$ і $\varphi^n \leq m < \varphi^{n+1}$, тому $0 \leq m - \varphi^n < \varphi^{n+1} - \varphi^n$, або $0 \leq r < \varphi^{n-1}$ (за властивістю 3). Теорема доведена.

Наслідок: Для довільного дійсного числа m існує єдине нормальне подання в золотій системі числення.

Дійсно, подаючи число m і всі можливі остачі r за формулою (6), одержимо подання числа m у вигляді (5), в якому, як випливає із нерівності $0 \leq r < \varphi^{n-1}$, після кожного одиничного розряду слідує хоча б один нульовий.

Розглянемо, як виконуються дії в золотій системі числення. При виконанні дії додавання використовуються правила $\varphi^n + \varphi^n = \varphi^n + \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} = \varphi^{n+1} + \varphi^{n-2}$. Звідки маємо $1+1 = \varphi^0 + \varphi^{-1} + \varphi^{-2} = 1,11$ або $1+1 = \varphi^1 + \varphi^{-2} = 10,01$. Отримуємо правило додавання однозначних чисел: $0+0=0$; $0+1=1+0=1$; $1+1=1,11$ або $1+1=10,01$. Отже, існує два способи додавання одиниць в n-х розрядах, при цьому відбувається перенесення двох одиниць одночасно. При додаванні за першим правилом в n-му розряді розміщується одна одиниця і дві

одиниці переносяться в (n-1)-й і (n-2)-й розряди. За другим правилом одна одиниця переноситься в (n+1)-й розряд, а друга – в (n-2)-й. Практично при додаванні двох чисел одиниці першого числа розміщуються у відповідні нульові розряди другого, яке перетворюється за правилами розгортки і згортки так, щоб відповідні розряди першого і другого чисел не були одночасно одиницями. В основі дії віднімання лежить правило (3), тому при позичанні одиниці у вищому розряді вона переходить у нижчий розряд за правилом $1 \rightarrow 1$. В основі правила множення двох чисел в золотій системі числення лежить властивість $\varphi^n \cdot \varphi^m = \varphi^{n+m}$, тому одержуємо для односторонніх чисел: $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$. Дія ділення зводиться до віднімання і порівняння чисел. Порівняння чисел, поданих в нормальній формі, здійснюється так само, як в класичній двійковій системі, тобто порозрядно, починаючи зі старшого, до виявлення розрядів, що не співпадають.

Використаємо алгоритм, за яким нами були знайдені подання для перших десяти натуральних чисел, і складемо програму мовою Паскаль (Pascal), яка реалізує цей алгоритм. Зауважимо, що за цією програмою можна подати числа, які не перевищують 150. Для цього використаємо масив $\varphi^{10}, \varphi^9, \dots, \varphi^0, \varphi^{-1}, \dots, \varphi^{-9}$.

```

Program Gold-system;
    m1,m2,m3,m4,m5,m6: label;
var A: array [0..20] of integer;
    n, i, j, k1, k2: integer;
Begin
    readln (n);
    for i:=0 to 20 do A[i]:=0;
    for i:=1 to n do
        begin
m1: j:=19; while j>=10 do
            begin
                if (A[j+1]=0) and (A[j]=1) and (A[j-1]=1) then
                    begin
                        A[j+1]:=1; A[j]:=0; A[j-1]:=0; goto m1
                    end;
                j:=j-1
            end;
m2: for j:=0 to 8 do
                if (A[j]=0) and (A[j+1]=0) and (A[j+2]=1) then
                    begin
                        A[j]:=1; A[j+1]:=1; A[j+2]:=0; goto m2
                    end;
                if A[10]=1 then
                    begin
m3: j:=19; while j>=1 do
                            begin
                                if (A[j+1]=0) and (A[j]=1) and (A[j-1]=1) then
                                    begin
                                        A[j+1]:=1; A[j]:=0; A[j-1]:=0; goto m3
                                    end;
                                j:=j-1
                            end;
                            goto m2
                    end;
                A[10]:=1
            end;
m4: j:=19; while j>=1 do
                begin
                    if (A[j+1]=0) and (A[j]=0) and (A[j-1]=1) then
                        begin
                            A[j+1]:=1; A[j]:=0; A[j-1]:=0; goto m4
                        end;
                    j:=j-1
                end;
                i:=20;
                while i>=10 do
                    i:=i-1; k1:=i; i:=0;
                    while A[i]=0 do i:=i+1;
                    k2:=i; i:=k1;
                    while i>=k2 do
                        begin
                            if i=9 then write (' ');
                            write (A[i]); i:=i-1
                        end;
                end;
    end;
end;

```

end;
writeln ("")

End.

Приклад роботи цієї програми подано наступною роздрукованою: $0=0$; $1=1$; $2=b_2=10,01$; $3=b_3=100,01$; $4=b_4=101,01$; $5=b_5=1000,1001$; $6=b_6=1010,0001$; $7=b_7=10000,0001$; $8=b_8=10001,0001$; $9=b_9=10010,0101$; $10=b_{10}=10100,0101$.

Порівняємо ці результати з поданнями, одержаними на основі властивості (3). Маємо: $2 = b_2 = a_{22}$; $3 = b_3 = a_{32}$; $4 = b_4 = a_{41}$; $5 = b_5 = a_{53}$; $6 = b_6 = a_{62}$; $7 = b_7 = a_{73}$; $8 = b_8 = a_{81}$; $9 = b_9 = a_{92}$; $10 = b_{10} = a_{(10)_2}$. Одержані двійкові зображення натуральних чисел є відображенням строгих математичних формул: $1 = a_{12} = \varphi^{-1} + \varphi^{-2}$; $2 = a_{21} = 1 + \varphi^{-1} + \varphi^{-2}$ або $2 = a_{22} = \varphi + \varphi^{-2}$; $3 = a_{31} = \varphi + 1 + \varphi^{-2}$ або $3 = a_{32} = \varphi^2 + \varphi^{-2}$ і т.д.

Знайомство з нетрадиційними системами числення буде корисним для учнів з високим рівнем навчання, або для тих, хто цікавиться математикою. Так, в підручнику з математики [5:7] при розгляді питання про системи числення, пропонується розділ "Для тих, хто хоче знати більше", де, крім десяткової, розглядаються й інші системи числення. Такий же розділ корисно ввести в програму факультативу для VII класу до теми "Системи числення", щоб ознайомити учнів з нетрадиційними системами числення, зокрема із золотою системою числення [4:40].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов Є.Д. Алгебраїчні властивості відношення золотого перерізу // У світі математики. – К.: Радянська школа, 1980. – С.74-88.
2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1992. – 200 с.
3. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. – М.: Знания, 1979. – 64 с.
4. Стахов А.П. Коды золотой пропорции, или система счисления для ЭВМ будущего?.. // Техника молодежи. – №7. – 1985. – С.40-44.
5. Янченко Т. Математика 5. – Тернопіль: Підручники & посібники, 2001. – 272 с.

Матеріал надійшов до редакції: 20.04.02 р.

Дидковская Т.В., Михайлова Л.В., Золотая система счисления.

Выводятся представления натуральных чисел в золотой системе счисления, в основу которой положено иррациональное число $\varphi = 1,618\dots$, которое получается в результате решения уравнения отношения золотого сечения. Приводится программа на языке Pascal для реализации предложенного алгоритма и указываются пути введения золотой системы счисления в школьный курс математики.

Didkivska T.V., Michaylova L.V. The Golden Number System.

The paper presents conceptions of natural numbers in the golden number system based on an irrational number $\varphi = 1,618\dots$, which is the result of solving the equation of the golden section. The program in PASCAL is presented for realization of a proposed algorithm and the ways of introduction of the golden number system into the secondary school program are mentioned in the article under consideration.