УДК 372.851

Т.В. Дідківська,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
І.А. Сверчевська,
асистент
(Житомирський педуніверситет)

УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗОЛОТОЇ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Виводяться подання натуральних чисел в системі числення, в основу якої покладено ірраціональне число $\beta = 1{,}46567\ldots$, що одержується в результаті розв'язування рівняння узагальненого відношення золотого перерізу. Наводиться програма мовою BASIC для реалізації запропонованого алгоритму.

Велике значення у розвитку в учнів інтересу до знань має вдале використання міжпредметних зв'язків при викладанні математики. Існує досить глибокий зв'язок між інформатикою та математикою, відмінний від загальноприйнятого. А саме: складання обчислювальної програми з деякої множини базисних команд дуже схоже з побудовою математичного доведення, виходячи із заданої системи аксіом. Нами складено програму для подання натуральних чисел в системі числення з ірраціональною основою.

В результаті розвитку обчислювальної техніки були виявлені недоліки класичної двійкової системи числення, яка була покладена американським математиком Джоном фон Нейманом в основу способу кодування інформації. Це стимулювало розвиток теорії систем числення і появу систем числення з ірраціональною основою. Було використано відношення золотого перерізу $\varphi = 1{,}618\ldots$ і побудована золота система числення [1:47].

Нами пропонується узагальнена золота система числення. Для цього будемо розглядати золотий β-переріз, який є узагальненням класичного поняття золотий переріз [2:5]. Суть поняття β-перерізу полягає в тому, що відрізок АВ поділяється внутрішньою точкою С на такі дві частини, що $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{AC}{CB}$. Якщо позначити відношення $\frac{AB}{AC} = x$, то одержимо рівняння відношення β-перерізу:

$$x^3 = x^2 + 1 \tag{1}$$

Єдиний дійсний додатній корінь цього рівняння β дорівнює :

$$\beta = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{29 + 3\sqrt{93}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{29 - 3\sqrt{93}}{2}} + 1\right). \tag{2}$$

Обчисливши це ірраціональне число, одержимо $\beta = 1{,}46567\ldots$. Оскільки β – корінь рівняння (1), то:

$$\beta^3 = \beta^2 + 1 \tag{3}$$

Помноживши обидві частини рівняння (3) на β^{n-3}, одержимо важливу властивість β-перерізу:

$$\beta^n = \beta^{n-1} + \beta^{n-3},\ n \in Z. \tag{4}$$

Введемо узагальнене поняття системи числення. Послідовність

$$\ldots, \beta^3, \beta^2, \beta^1, \beta^0 = 1,\ \beta^{-1}, \beta^{-2}, \beta^{-3}, \ldots \tag{5}$$

будемо називати β-ковою системою числення. Цифрами в запису довільного числа в цій системі числення можуть бути тільки 0 і 1, тому що $1 < \frac{\beta^{n+1}}{\beta^n} < 2$. Візьмемо довільне натуральне число $a = a_0$ і знайдемо такий номер n, що $\beta^n \le a_0 < \beta^{n+1}$. Записавши першу цифру числа $b_1 = 1$ і різницю $a_1 = a_0 - \beta^n$, маємо перший крок алгоритму. Нехай k кроків вже виконано і одержано послідовність цифр:

$$b_1, b_2, \ldots, b_k, \tag{6}$$

яка складається з нулів і одиниць, і число a_k. Тоді (k+1)-й крок побудови полягає в наступному: порівняємо число a_k з числом β^{n-k}, якщо $a_k < \beta^{n-k}$, то наступна цифра $b_{k+1} = 0$ і зафіксуємо число $a_{k+1} = a_k$, а якщо $a_k \ge \beta^{n-k}$, то наступна цифра $b_{k+1} = 1$ і покладаємо $a_{k+1} = a_k - \beta^{n-k}$. Остаточна послідовність виду (6) називається позиційним записом числа a в β-ковій системі числення, а члени цієї послідовності β-ковими цифрами цього числа. Маємо:

$$a = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i \beta^i,\ \text{де}\ b_i \in \{0;1\}. \tag{7}$$

Різні подання одного і того ж числа в β-ковій системі числення можна одержати за допомогою правил розгортки $\left(\beta^n = \beta^{n-1} + \beta^{n-3}\right)$ і згортки $\left(\beta^{n-1} + \beta^{n-3} = \beta^n\right)$, які випливають із властивості (4). Маємо при операції розгортки $1000 \to 0101$, а при операції згортки навпаки $0101 \to 1000$. З'ясуємо зміст цих операцій на прикладах. Для цього знайдемо подання натуральних чисел від 1 до 10 в системі числення (5), враховуючи, що кожне наступне число більше за попереднє на 1.

	β^{4}	β^{3}	β^{2}	β^{1}	β^{0}	β^{-1}	β^{-2}	β^{-3}	β^{-4}	β^{-5}	β^{-6}	β^{-7}	β^{-8}	β^{-9}	β^{-10}
$1=a_{1i}=$	0	0	0	0	1,	0	0	0	0						
	0	0	0	0	0,	1	0	1	0						
$2=a_{2i}=$	0	0	0	0	1,	1	0	1	0						
	0	0	0	0	1,	0	1	1	1						
	0	0	0	1	0,	0	0	1	1						
$3=a_{3i}=$	0	0	0	1	1,	0	0	1	1	0	0	0			
	0	0	0	1	1,	0	0	1	0	1	0	1			
	0	0	0	1	1,	0	1	0	0	0	0	1			
	0	0	0	1	0,	1	1	1	0	0	0	1			
$4=a_{4i}=$	0	0	0	1	1,	1	1	1	0	0	0	1			
	0	0	1	0	1,	0	1	1	0	0	0	1			
	0	1	0	0	0,	0	1	1	0	0	0	1			
$5=a_{5i}=$	0	1	0	0	1,	0	1	1	0	0	0	1			
	0	1	0	1	0,	0	0	1	0	0	0	1			
$6=a_{6i}=$	0	1	0	1	1,	0	0	1	0	0	0	1			
	0	1	0	1	1,	0	0	0	1	0	1	1			
	0	1	0	1	0,	1	0	1	1	0	1	1			
$7=a_{7i}=$	0	1	0	1	1,	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
	0	1	0	1	1,	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
	0	1	0	1	1,	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
	0	1	0	1	1,	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
	1	0	0	0	1,	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
	1	0	0	1	0,	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
$8=a_{8i}=$	1	0	0	1	1,	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
	1	0	1	0	1,	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
	1	1	0	0	0,	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
$9=a_{9i}=$	1	1	0	0	1,	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
	1	1	0	0	0,	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
$10=a_{10i}=$	1	1	0	0	1,	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1

Використовуючи позиційні записи a_{ni} для натуральних чисел, можна одержати формули, за якими натуральні числа виражаються через степені числа β. Наприклад:

$$1=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^3};\quad 2=1+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^3};\quad 3=\beta+1+\beta^{-3}+\beta^{-4}. \tag{8}$$

Розглянемо, як виконуються дії в β-ковій системі числення. При виконанні дії додавання слід користуватись правилом:

$$\beta^n+\beta^n=\beta^n+\beta^{n-1}+\beta^{n-3}. \tag{9}$$

Звідси одержуємо $1+1=\beta^0+\beta^0=\beta^0+\beta^{-1}+\beta^{-3}=1{,}101$. Маємо правило додавання однозначних чисел: $0+0=0;\ 0+1=1;\ 1+0=1;\ 1+1=1{,}101$. Практично, щоб додати два числа, потрібно одиниці першого числа розмістити у відповідні нульові розряди другого. Для цього дані числа перетворюються за допомогою правил розгортки і згортки так, щоб відповідні розряди не були одночасно одиницями. В основі дії віднімання лежить властивість (4). Ось чому при позичанні одиниці у вищому розряді вона переходить у нижчі розряди за правилом $1\to 101$. Правило для виконання дії множення випливає із властивості $\beta^n\cdot\beta^m=\beta^{n+m}$. Одержуємо правила множення для одноцифрових чисел: $0\cdot 0=0;\ 0\cdot 1=0;\ 1\cdot 0=0;\ 1\cdot 1=1$. Дія ділення зводиться до віднімання і порівняння чисел.

Складемо програму мовою BASIC, яка реалізує алгоритм подання натуральних чисел в системі числення (5).

```
10  cls
dim d(50), v(50), z(50), a(50), f(50)
30  b=(((29+3*sqr(93))/2)^(1/3)+((29-
3*sqr(93))/2)^(1/3)+1)/3
40  d(1)=1: d(2)=b: d(3)=b*b
50  for i=4 to 25
60  d(i)=d(i-1)+d(i-3)
70  next i
80  v(1)=1: v(2)=b*b-b: v(3)=b-1
90  for i=4 to 25
100 v(i)=v(i-3)-v(i-2)
110 next i
120 for i=1 to 25
130 z(i)=v(26-i)
140 next i
150 for i=26 to 49
160 z(i)=d(i-24)
170 next i
210 input a(0)
220 for i=1 to 49
230 if z(i)<=a(0) goto 280
240 a(1)=a(0)-z(i-1)
250 f(1)=1
260 n=i-1: d=n-24
270 goto 290
280 next i
290 for k=1 to n-1
300 if a(k)<z(n-k) goto 340
310 f(k+1)=1
320 a(k+1)=a(k)-z(n-k)
330 goto 360
340 f(k+1)=0
350 a(k+1)=a(k)
360 next k
370 e$="#"
380 for i=1 to n-1
390 if i=d+1 then print ", ";
400 print using e$; f(i);
410 next i
420 end
```

В результаті одержано:

$b_1=1=1{,}0000000;\ b_2=2=10{,}0100001;\ b_3=3=100{,}1000100001;\ b_4=4=1000{,}1000100001;$

$b_5=5=10000{,}00100001001001001001;\ b_6=6=10001{,}00100001001001001001;$

$b_7=7=100000{,}00010000001001001001;\ b_8=8=100001{,}00010000001001001001;$

$b_9=9=100100{,}00000010001001001001;\ b_{10}=10=1000000{,}00000010001001001001.$

Перетворимо ці відповіді за допомогою правил розгортки і згортки до виразів, які виведені на основі властивості (4).

$2=b_2=10{,}0100001=10{,}0010101=10{,}0011=a_{23}$

$3=b_3=100{,}1000100001=100{,}1000010101=100{,}1000011000=100{,}0101011=010{,}1101011=10{,}1110001=a_{34}$

$4=b_4=1000{,}1000100001=1000{,}0101100001=1000{,}0101010101=1000{,}0101011=1000{,}0110001=a_{43}.$

Інші натуральні числа подано з похибкою Δ. Обчислимо її, перетворивши точні значення a_{ki} за допомогою розгортки і згортки.

$5=a_{52}=1010\ {,}0010001000=1010{,}0010000101000=1010{,}0010000100101000=1010{,}0010000100100101000=$

$=01010{,}0010000100100100101000=10000{,}00100001001001001001 01=b_5+\beta^{-22};\quad \Delta=a_{52}-b_5=\beta^{-22}.$

Для інших чисел аналогічно одержуємо:

$6=a_{61}=b_6+\beta^{-22};\ 7=a_{76}=b_7+\beta^{-22};\ 8=a_{81}=b_8+\beta^{-22};\ 9=a_{92}=b_9+\beta^{-22};\ 10=a_{(10)1}+\beta^{-22}$, звідки знаходимо похибку $\Delta=\beta^{-22}$.

Для подальшої роботи над темою корисно запропонувати студентам або учням, які виявляють схильність до дослідницької діяльності, розв’язати наступні вправи:

1. Користуючись властивістю золотого перерізу $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$; $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ і правилом згортки і розгортки, знайдіть подання початкового відрізка натурального ряду чисел в золотій системі числення $...\varphi^{-2}, \varphi^{-1}, \varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, ...$ [3:55].

2. Складіть програму для знаходження двійкових зображень натуральних чисел в золотій системі числення, використовуючи алгоритм, запропонований в даній статті для узагальненої системи числення.

3. Порівняйте формули, виведені на основі властивості золотого перерізу $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}, n \in Z$, з відповідними виразами, обчисленими за комп'ютерною програмою.

4. Доведіть, що існує єдине подання довільного дійсного числа у вигляді $a = \beta^n + r$, де $0 \le r < \beta^n$.

5. Нормальним поданням в системі числення (5) з основою β будемо називати таке подання, в якому після кожного одиничного розряду слідує не менше, ніж два нульових розряди. Доведіть, що існує єдине нормальне подання довільного дійсного числа в системі числення золотого β-перерізу.

В умовах диференційованого навчання вивчення можливостей узагальнення вже відомих понять дає можливість проводити дослідницьку роботу з учнями, які беруть участь в роботі Малої Академії Наук, або зі студентами, що працюють над дипломними роботами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. – М.: Знание, 1979. – 64 с.
2. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. – М.: Молодая гвардия, 1990, – 236 с.
3. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1992, – 200 с.

Матеріал надійшов до редакції 4.02.02 р.

Дидковская Т.В., Сверчевская И.А. Обобщение золотой системы счисления.

Выводятся представления натуральных чисел в системе счисления, в основу которой положено иррациональное число $\beta = 1{,}46567...$, которое получается в результате решения уравнения обобщенного отношения золотого сечения. Приводится программа на языке BASIC для реализации предложенного алгоритма.

Didkivska T.V., Sverchevska I.A. Generalization of the Golden Number System.

The paper presents conceptions of natural numbers in the number system based on an irrational number $\beta = 1{,}46567...$, which is the result of solving the equation of generalized ratio of the golden section. The program in BASIC is presented for realization of a proposed algorithm.