Щехорський А.Й.,
кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри прикладної математики та інформатики
Житомирський державний університет імені Івана Франка

ЕФЕКТИВНІСТЬ ВИКОРИСТАННЯ СКМ В ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ

Постановка проблеми: Якість підготовки фахівців докорінно залежить від новітніх інформаційних технологій вирішення прикладних математичних задач. Для їх реалізації доцільно використовувати програмний ресурс СКМ (систем компютерної математики) Mathematica, Maple – системи вишого рівня, Mathcad Pro, MatLab – системи середнього рівня. Дані системи володіють найбільш універсальними математичними програмами, здатні вирішувати різноманітні задачі, зокрема задачі оптимізації.Основна проблема – ефективне створення і використання програм на базі наявних пакетів прикладного програмного забезпечення, а також їх порівняльний аналіз .

Мета статті: Надати програмний продукт, проаналізувати наявні програмні математичні пакети в СКМ стосовно задач оптимізації навчальної дисципліни "Методи оптимізації і дослідження операцій".

Виклад основного матеріалу. Оптимізація – надання характеристикам будь-якого процесу в природі і суспільстві екстремальних значень їх параметрів. Процес оптимізації може бути здійснений за багатьма напрямками математики. Оптимізацію, що зводиться до задач пошуку екстремумів функцій у всьому евклідовому просторі називають безумовною оптимізацією, а оптимізацію в деякій області скінченно-вимірного евклідового простору називають умовною оптимізацією. Саму область умовної оптимізації називають допустимою областю.

Ціль методу оптимізації – дати розгорнутий аналіз і програмне забезпечення тих розділів скінченно-вимірної теорії оптимізації, з якими студент знайомиться на молодших курсах.

Оптимізація за функцією однієї змінної називають одновимірною оптимізацією, багатьох змінних – багатовимірною оптимізацією.

Відносно допустимої множини загальна постановка задачі оптимізації визначає поділ задач оптимізації на наступні класи:

1) Задачі локальної безумовної оптимізації;
2) Задачі глобальної безумовної оптимізації;
3) Задачі локальної умовної оптимізації;
4) Задачі глобальної умовної оптимізації.

Задачами безумовної локальної оптимізації називають задачі пошуку екстремуму функцій в точках скінченно-вимірного евклідового простору R^n, $X = R^n$. Локальна умовна оптимізація – це задача пошуку екстремуму функцій в точках допустимої множини $X \subset R^n$. Глобальна безумовна оптимізація визначає пошук екстремуму функції у всьому просторі R^n, Глобальна умовна оптимізація - це пошук екстремуму функцій багатьох змінних на всій допустимій множині евклідового простору R^n. Дана стаття стосується питань багатовимірної локальної безумовної оптимізації.

Локальна безумовна оптимізація, тобто пошук безумовного локального екстремуму в СКМ здійснюється за градієнтними методами. Слід памятати, що градієнтні методи взагалі дають можливість знаходження тільки стаціонарних точок функції. Вони закладені в процедурах *Maximize* і *Minimize* в Mathcad Pro, і *FindMinimum* в Mathematica. Причому оператор *Maximize* орієнтований на пощук стаціонарних точок, в яких можливий максимум функції, оператор *Minimum* - на пощук стаціонарних точок, в яких можливий мінімум. Якщо функція опукла вниз або вверх, то в стаціонарній точці маємо екстремум. Коли така інформація вісутня, то потрібно проводити діагностику стаціонарної точки на предмет існування в ній екстремальних значень. У випадку належності функції класу $C^2(R^n)$ корисно здійснювати діагностику за власними значеннями квадратичної форми, тобто за власними значеннями її матриці Гессе.

Зауважимо, за оператором *FindMinimum* система Mathematica призначена для пошуку стаціонарних точок мінімумум функції. Коли необхідно відшукати стаціонарну точку локального максимуму достатньо перед функцією поставити знак мінус, або помножити її на (-1). В прикладі запуск програми для діагностики локального максимуму функції,за початкової точки (1,1), дає не зовсім точні результати стосовно визначення максимального значення функції в стаціонарній точці. В системі Mathematica при застосуванні оператора *FindMinimum* максимальне значення функції обчислюється зі знаком "мінус", що є її недоліком даної системи.

Приведена програма придатна для пошуку екстремальних точок . і може бути застостосована для пошуку локальних екстремумів функцій трьох і більше числа незалежних змінних. Для цього потрібно відповідним чином скорегувати деякі обєкти програми, тобто втрутитись в програму. Це стосується зміни шаблона матриці F. імені функції, координат початкової точки наближення.

За тією самою структурою складання програми алгоритму пошуку безумовного локального екстремуму можна здійснити і в СКМ Mathcad Pro.

Вхідні дані

f(x,y): = sin(xy) x: = 1 y: = 1 m: = Minimize(f,x,y) M: = Maximize(f,x,y)

$$\mathrm{Hessian}(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2}f(x,y) & \frac{d}{dx}\frac{d}{dy}f(x,y) \\ \frac{d}{dx}\frac{d}{dy}f(x,y) & \frac{d^2}{dy^2}f(x,y) \end{pmatrix}$$

Програма

λ: = eigenvals(Hessian(m_1,m_2) L: = eigenvals(Hessian(M_1,M_2)

$$a := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..\mathrm{rows}(\lambda) \\ \quad a \leftarrow a+1 \ \text{ if } \lambda_j > 0 \\ a \end{array} \right. \qquad b := \left| \begin{array}{l} b \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..\mathrm{rows}(\lambda) \\ \quad b \leftarrow b+1 \ \text{ if } \lambda_j < 0 \\ b \end{array} \right.$$

$$\text{екстремум} := \left| \begin{array}{l} \text{екстремум} \leftarrow \text{"локального\_мінімуму\_не має"} \text{ if } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{екстремум} \leftarrow \text{"точка\_локального\_мінімуму"} \text{ if } a = \mathrm{rows}(\lambda) \\ \text{екстремум} \leftarrow \text{"додаткові\_дослідження"} \text{ otherwise} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$A := \left| \begin{array}{l} A \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..\mathrm{rows}(L) \\ \quad A \leftarrow A+1 \ \text{ if } L_j > 0 \\ A \end{array} \right. \qquad B := \left| \begin{array}{l} B \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..\mathrm{rows}(L) \\ \quad B \leftarrow B+1 \ \text{ if } L_j < 0 \\ B \end{array} \right.$$

$$\textbf{Екстремум} := \left| \begin{array}{l} \textbf{Екстремум} \leftarrow \text{"локального\_максимуму\_не має"} \ \textbf{if} \ \mathbf{A} \neq 0 \wedge \mathbf{B} \neq 0 \\ \textbf{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} \textbf{Екстремум} \leftarrow \text{"точка\_локального\_максимуму"} \ \textbf{if} \ \mathbf{B} = \mathbf{rows}(\mathbf{L}) \\ \textbf{Екстремум} \leftarrow \text{"додаткові\_дослідження"} \ \textbf{otherwise} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Стаціонарна_точка_передбачуваного_мінімуму: = m^T

Стаціонарна_точка_передбачуваного_максимуму: = M^T
Значення_функції_в_стаціонарній_точці_передбачуваного_мінімуму: = $f(m_1.m_2)$
Значення_функції_в_стаціонарній_точці_передбачуваного_максимуму: = $f(M_1.M_2)$
Результати

Стаціонарна_точка_передбачуваного_мінімуму = (0 0)
Стаціонарна_точка_передбачуваного_максимуму = (1.253 1.253)
Значення_функції_в_стаціонарній_точці_передбачуваного_мінімуму = 0
Значення_функції_в_стаціонарній_точці_передбачуваного_максимуму = 1
екстремум = "локального_мінімуму_не має"
Екстремум = "точка_локального_максимуму"

Для створення програми безумовної локальної оптимізації функцій трьох і більше змінних необхідне корегування програми. Стосовно вхідних даних – зміна імені функції, координат початкової точки наближення, кількості координат в матриці Гесе і її елемегнтів; стосовно програми – збільшення кількості змінніх для визначення власних значень матриці Гесе.

Наявність готових програм (процедур) пошуку стаціонарних точок безумовного локального екстремуму в R^n для функції багатьох змінних в системі Maple.не передбачено. Можна запропонувати, що і відбувається в системі Maple, пощук стаціонарних точок функції в R^n як результат розвязку системи алгебраїчних рівнянь, кожне з яких є частинною похідною прирівненої до нуля. Але випадок наявності нескінченної кількості стаціонарних точок в R^n алгоритм їх пошуку повинен зводитись до алгоритму знаходження стаціонарних точок в обмежених областях, що вичерпують весь простір. Сама задача знаходження стаціонарних точок в обмежених областях відноситья до задач умовної оптимізації. Більше того, одним із чисельних методів розвязку систем адгебраїчних рівнянь може бути зведений до безумовної глобальної оптимізації.

Крім СКМ, знаходження стаціонарних точок в R^n , можна здійснювати в Excel (починаючи з версії Excel 2003), використовуючи для цього пакет прикладгих програм “Поиск решения”.

Висновки та переспективи подальших досліджень:

Блок – схема, за якою складались програми тут не приводилась. Її проведення і розбір на лабораторних заняттях обовязкове.

Можливе поліпщення структури програми в Mathcad Pro – перевід блоків під один оператор програмування Add Line. Це робилось свідомо – щоб не втрачати максимального відображення блок-схеми з можливістю її детального аналізу в учбовому процесі.

Особливість порівняння приведених двох програм в СКМ Mathematica і Mathcad Pro єполягає в порівненні їх щвидкості набору і детального аналізу. В цьому відношенні переваги має СКМ Mathematica. Стосовно задач оптимізації на лабораторних заняттях студентів корисно знайомити з можливостями багатьох СКМ.

В лвній статті лишились питання ефективності використання в учбовому процесі СКМ в задачах глобальної безумовної і умовної оптимізації, що є переспективою подальшого дослідження.

Список використаних джерел та літератури

1. Очков В.Ф. Mathcad Pro для студентов, инженеров и конструкторов СПб.БХВ-Петербург. – 2007. С. 368.

2. Васильев А.Н. Maple 8. Самоучитель. Издательский дом “Видьямс”. – 2003. – С. 352.
3. Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. ДМК Пресс. 2008. С. 576.