Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

А.Ц. Врановський, С.О. Карплюк

Диференціальна геометрія

Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів

Житомир
Вид-во ЖДУ ім. І. Франка
2013

УДК 514.7

ББК 22.151

Ф 83

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

(Лист МОНУ №1/11-13131 від 19.08.2013р.)

Рецензенти:

Михайленко В.В. – доктор фізико-математичних наук, професор.

Лось Л.В. – доктор технічних наук, професор.

Щехорський А.Й. – кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Франовський А. Ц., Карплюк С. О.

Ф 83 Диференціальна геометрія : Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2013. – 188 с., іл.

ISBN 978-966-485-152-4

Посібник призначений для використання студентами на лекціях та практичних заняттях під керівництвом викладача. Посібник містить теоретичні відомості з диференціальної геометрії, приклади виконання завдань, а також перелік завдань для самостійного розв’язування. Викладений матеріал відповідає діючим стандартам із диференціальної геометрії для студентів фізико-математичних факультетів.

Для студентів фізико-математичних факультетів, учителів математики загальноосвітніх шкіл, а також викладачів вищих педагогічних навчальних закладів.

УДК 514.7

ББК 22.151

ISBN 978-966-485-152-4

Вступ

В умовах розбудови національної системи освіти, відтворення і зміцнення інтелектуального потенціалу нації, виходу науки і техніки, економіки і виробництва в Україні на світовий рівень, інтеграції в світову систему освіти, переходу до ринкових відносин і конкуренції, особливо актуальним стає забезпечення належного рівня фахової підготовки майбутнього вчителя математики.

Важливою складовою фахової підготовки спеціаліста-математика є навчальна дисципліна "Диференціальна геометрія та топологія". Диференціальна геометрія – це розділ геометрії, який вивчає геометричні образи, в першу чергу криві і поверхні, а також сім‘ю кривих і поверхонь методами аналізу нескінченно малих. Диференціальна геометрія виникла і розвивалася в тісному зв‘язку з аналізом, який сам значною мірою виріс із задач геометрії. Багато геометричних понять передували відповідним поняттям аналізу.

Диференціальна геометрія ґрунтується на використанні векторного диференціального числення з метою дослідження кривих та поверхонь. Тому питання цього курсу геометрії тісно пов’язані із відповідними розділами математичного аналізу (дослідження функцій на існування особливих точок, асимптоти кривих, диференціальні рівняння кривих тощо). Окрім цього є й досить специфічні питання: супровідний тригранник Френе кривої, кривина та скрут, дотик кривих та інші, які безпосередньо застосовуються у практичній діяльності людини.

При вивченні теорії поверхонь значне місце відводиться першій та другій квадратичній формах та їх геометричному змісту. Виділяються усі типи кривих ліній на поверхні: асимптотичні, геодезичні, лінії кривини, які описуються відповідними диференціальними рівняннями. Теоретичну значущість курсу посилюють теореми Гуаса, Гауса-Бонне, Меньє, формули Ейлера та Родріга для головних кривин поверхні. Елементи топології передбачають вивчення взаємно однозначних і неперервних відображень у метричних та топологічних просторах.

КУРС ЛЕКЦІЙ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

КРИВІ НА ПЛОЩИНІ ТА В ПРОСТОРІ.

ПОНЯТТЯ ТОПОЛОГІЧНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ПОНЯТТЯ КРИВОЇ.

Нехай маємо 2 деякі множини Ф та $Ф^/$. Нехай множина Ф перетворюється в множину $Ф^/$, тобто кожній точці однієї множини ставиться у відповідність точка іншої множини.

Означення 1. Перетворення називається неперервним, якщо воно близькі точки однієї множини чи фігури переводить у близькі точки іншої множини чи фігури, тобто $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_\varepsilon > 0: \quad \rho(A'B') < \delta \Rightarrow \rho(AB) < \varepsilon$.

Означення 2. Перетворення називається топологічним, якщо воно, а також обернене до нього неперервне і різні точки однієї фігури чи множини переводить в різні точки іншої фігури чи множини (немає співпадаючих точок).

Означення 3. Перетворення називається локально-топологічним, якщо воно топологічне в як завгодно малому околі точки.

Скористаємось цими означеннями і введемо поняття кривої.

Нехай маємо деякий відкритий відрізок (a, b) ($t \in (a, b)$).

Означення 4. Елементарною кривою ми будемо називати криву, що отримується в результаті топологічного перетворення відкритого відрізка.

Означення 5. Простою кривою називається крива в околі будь–якої її точки вона є елементарна.

Означення 6. Загальною кривою називається топологічне перетворення простої кривої.

Якщо кожному значенню t відрізка (a, b) ставити у відповідність значення x, y та z, тобто $\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$ (1), то в результаті ми отримаємо якусь криву, яка буде описуватись рівняннями (1). Причому для різних значень t_1 і t_2 виконується умова: $[f_1(t_2) - f_1(t_1)]^2 + [f_2(t_2) - f_2(t_1)]^2 + [f_3(t_2) - f_3(t_1)]^2 = 0$ при $t_1 \neq t_2$. Рівняння (1) називаються параметричними рівняннями кривої. Ми бачимо, що функції $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ можуть бути координати вектора, початок якого знаходиться в початку відліку системи координат, а кінець описує криву γ:

$\vec{r} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ (2) – *векторно–параметричне рівняння кривої.*

РЕГУЛЯРНІ КРИВІ. ТЕОРЕМА ПРО ПАРАМЕТРИЗАЦІЮ ВИДУ: $y = f(x),\ z = \varphi(x),$ x=t.

Означення 7. Крива γ називається регулярною, якщо вона допускає регулярну параметризацію, тобто функції $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ є k раз неперервно диференційованими. При $k=1$ крива називається гладкою.

Означення 8. Крива γ називається аналітичною, якщо вона допускає аналітичну параметризацію, тобто функції $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ можуть бути представлені функціональним.

Інколи при певному виборі системи координат рівняння (1) можна звести до виду: $\begin{cases} y = f(x) \\ z = \varphi(x) \end{cases}$, який є зручним для дослідження кривої. Виникає питання: коли це можна зробити?

Теорема. Нехай крива γ задана рівняннями (1), тоді, якщо в околі деякої точки кривої, що дає значенню t_0 $f_1^{/} \neq 0$, то рівняння (1) можуть бут представлені рівнянням виду: $\begin{cases} y = f(x) \\ z = \varphi(x) \end{cases}$ **(1*).**

Доведення: Якщо $x = f_1(t)$ в околі точки, що відповідає значенню t_0, то існує така функція ψ, яка рівна значенню t_0 при $x=x_0$ і така, що $x=f_1(\psi(x))$. Про диференціюємо останню рівність і будемо мати: $1 = \psi'(x_0) \cdot f_1^{/}(t)$. $f_1^{/}(t) \neq 0 \Rightarrow \psi \neq 0 \Rightarrow$ ця функція монотонна. А це значить, що між значеннями x і t існує взаємно однозначна відповідність. А отже, замість t можна взяти x, тоді рівняння (1) наберуть вигляду:

$$\begin{cases} x = f_1(\psi(x)) = x \\ y = f_2(\psi(x)) = f(x) \\ z = f_3(\psi(x)) = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ z = \varphi(x) \end{cases}$$

. Теорема доведена.

ВЕКТОР-ФУНКЦІЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ.

Вектор-функція скалярного аргументу має вигляд: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Аналогічно як і для функції скалярної можна вводити поняття границі, похідної та розкладу в ряд. Покажемо як це зробити.

1) Границя вектор–функції.

Вектор $\vec{A}$ називається границею функції $\vec{r}(t)$, коли $t \to t_0$, якщо виконується умова: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |t - t_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{A}| < \varepsilon$.

2) Похідна вектор–функції.

Можна показати, що: похідною вектор–функції буде називатись границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли $\Delta t \to 0$.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[x(t+\Delta t)-x(t)]\vec i+[y(t+\Delta t)-y(t)]\vec j+[z(t+\Delta t)-z(t)]\vec k}{\Delta t}=$$

$=x'\vec i+y'\vec j+z'\vec k \Rightarrow$ правила диференціювання вектор–функції будуть аналогічні як і для скалярної функції. Скориставшись цим покажемо розклад вектор–функції в ряд Тейлора:

$$\vec r(t+\Delta t)=\vec r(t)+\frac{\vec r'(t)}{1!}\Delta t+\frac{\vec r''(t)}{2!}\Delta t^2+\ldots+\frac{\vec r^{(n)}(t)}{n!}\Delta t^n+\varepsilon(\Delta t).$$

ДОТИЧНА ДО КРИВОЇ. ТЕОРЕМА ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ДОТИЧНОЇ.

Означення 9. Пряма g називається дотичною до кривої γ в точці P, якщо виконується умова: $\lim\limits_{m.Q\to m.P}\dfrac{\delta}{d}=0$.

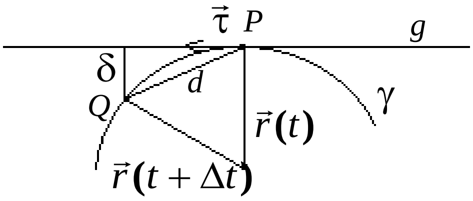
Теорема. Гладка крива γ в кожній своїй точці має дотичну і притому єдину.

Доведення: На прямій g від т. P відкладемо одиничний вектор $\vec\tau$.

$d=\left|\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)\right|$, $\quad \delta=\left|((t+\Delta t)-\vec r(t))\times\vec\tau\right|$ Скористаємось означенням дотичної:

$$\lim_{Q\to R}\frac{\left|(\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t))\times\vec\tau\right|}{\left|\vec r(t+\Delta t)-\vec r(\Delta t)\right|}=\frac{\left|\vec r'(t)\times\vec\tau\right|}{\left|\vec r(t)\right|}=0\Rightarrow\vec r'(t)\uparrow\uparrow\vec\tau,$$ отже *вектор* $\vec r'(t)$ *визначає напрям дотичної.*

Оскільки крива гладка, то $\vec r'(t)$ завжди існує, отже, існує напрям дотичної і сама дотична. Покажемо, що якщо існує $\vec r'(t)$, то цей вектор дійсно визначає дотичну.



$$\frac{\delta}{d}=\frac{\left|(\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t))\times\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\right|}{|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)|}\to .$$

$$\to\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|^2}=0$$

Єдиність дотичної слідує з єдиності прямої, що задається точкою і напрямним вектором. Теорема доведена.

РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ДО КРИВОЇ ПРИ РІЗНИХ СПОСОБАХ ЇЇ ЗАДАННЯ.

1) Нехай крива γ задана векторно-параметричним рівнянням: $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ або $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$.

$\vec{r}\,'=\vec{r}\,'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$;

$\vec{r}\,'\uparrow\uparrow\overrightarrow{PM}\Rightarrow\frac{x-x_0}{x'(t)}=\frac{y-y_0}{y'(t)}=\frac{z-z_0}{z'(t)}$ (1) – *рівняння дотичної.*

2) $y=f(x);\, z=0;\, x=t$. З рівняння (1) слідує, що $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y}\Rightarrow y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ (2).

3) $\begin{cases}y=\varphi(x)\\ z=\psi(x)\end{cases}$ $x=t;\ \frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi_x}=\frac{z-z_0}{\psi_x}\Rightarrow\begin{cases}y-y_0=\varphi_x(x-x_0)\\ z-z_0=\psi_x(x-x_0)\end{cases}$ (3) – *рівняння дотичної.*

4) Крива задається як перетин двох поверхонь:

$$\begin{cases}\varphi(z,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases},\ \begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi_x\cdot x'(t)+\varphi_y\cdot y'(t)+\varphi_z\cdot z'(t)=0\\ \psi_x\cdot x'(t)+\psi_y\cdot y'(t)+\psi_z\cdot z'(t)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{(x',y',z')}\perp\overrightarrow{(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)}\\ \overrightarrow{(x',y',z')}\perp\overrightarrow{(\psi_x,\psi_y,\psi_z)}\end{cases}$$

$$\overrightarrow{(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)}\times\overrightarrow{(\psi_x,\psi_y,\psi_z)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}\varphi_y & \varphi_z\\ \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}\varphi_z & \varphi_x\\ \psi_z & \psi_x\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}.$$

Тоді $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\varphi_y\varphi_z\\ \psi_y\psi_z\end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\varphi_z\varphi_x\\ \psi_z\psi_x\end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\varphi_x\varphi_y\\ \psi_x\psi_y\end{vmatrix}}$ – *рівняння дотичної* до кривої, що задана як перетин двох поверхонь.

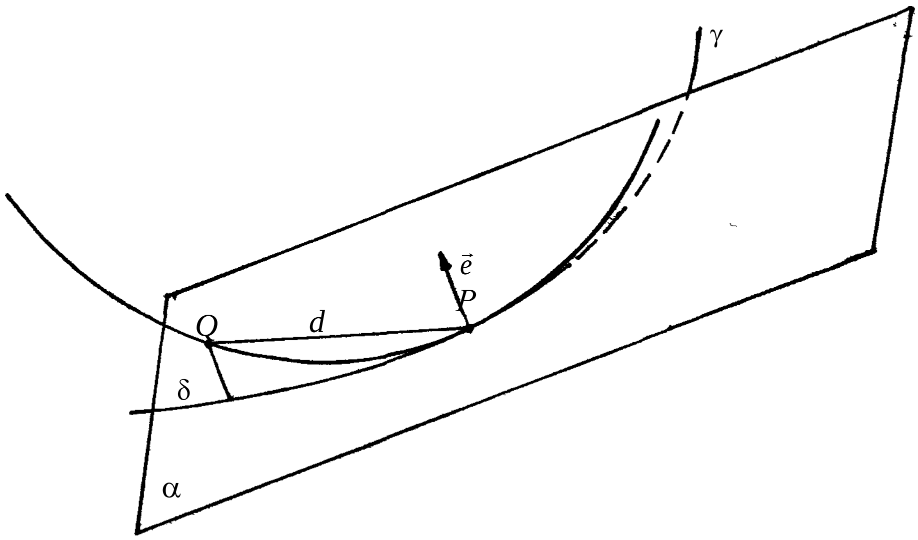
5) Крива плоска задана в неявній формі.

$\varphi(x,y)=0$. Будемо вважати, що $\psi(x,y,z)=z$, матимемо $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\varphi_y & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix}0 & \varphi_x\\ 1 & 0\end{vmatrix}}$. Залишається $\dfrac{x-x_0}{\varphi_y}=\dfrac{y-y_0}{-\varphi_x}$ (5), можна подати так: $(y-y_0)\varphi_y+(x-x_0)\varphi_x=0$ (5/).

СТИЧНА ПЛОЩИНА КРИВОЇ. РІВНЯННЯ СТИЧНОЇ ПЛОЩИНИ.

Стична площина кривої – це така площина, яка найкраще прилягає до кривої в даній точці.

Означення. Площина α називається стичною до кривої γ в точці P, якщо виконується умова: $\lim\limits_{Q\to R}\dfrac{\delta}{d^2}=0$.



Теорема. Регулярна (двічі неперервна диференційовна) крива γ в кожній своїй точці має стичну площину, яка визначається векторами $\vec{r}'(t)$ та $\vec{r}''(t)$ і ця площина єдина, якщо $\vec{r}'(t)\uparrow\uparrow\vec{r}''(t)$та їх безліч, якщо один з векторів нуль-вектор або вони колінеарні.

Доведення: $d=\left|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\right|,\quad \delta=\left|(\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\cdot\vec{e})\right|$; $\left|\vec{e}\right|=1$.

$$\lim_{\substack{Q\to P\\ \Delta t\to 0}}\frac{\delta}{d^2}=\lim_{\substack{Q\to P\\ \Delta t\to 0}}\frac{\left|(\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t))\cdot\vec{e}\right|}{\left|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\right|^2}.$$

Функцію $\vec{r}(t+\Delta t)$ розкладемо в ряд і обмежимось в чисельнику трьома членами розкладу, а в знаменнику двома.

$$\lim_{Q\to P}\frac{\delta}{d^2}=\lim_{Q\to P}\frac{\left|\vec{e}(\vec{r}'(t)\Delta t+\dfrac{\vec{r}''(t)}{2}\Delta t^2+\varepsilon_1\Delta t^2)\right|}{(\vec{r}'(t)\Delta t+\varepsilon_2\Delta t)^2}=$$

$$=\lim_{Q\to P}\frac{\left|\dfrac{\vec{e}\vec{r}'(t)}{\Delta t}+\dfrac{\vec{e}\vec{r}''(t)}{2}+\varepsilon_1\right|}{\vec{r}'^2(t)+\varepsilon_3}=0.$$

Так як $\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_3\to 0$ при $Q\to P$, а $\vec{r}'(t)\neq 0$ та $\vec{r}''(t)\neq 0$, то $\vec{r}'\perp\vec{e}\quad \vec{r}''\perp\vec{e}$, а значить вектори $\vec{r}'(t)$ та $\vec{r}''(t)$ паралельні спільній площині. Якщо ці вектори колінеарні або один із них нуль вектор, то будь-яка площина, яка проходить через дотичну до кривої буде стичною. Теорема доведена.

Запишемо умову компланарності: $\overrightarrow{PM} \times \overrightarrow{r''} \cdot \overrightarrow{r''} = 0$, тобто:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}$$ *– рівняння стичної площини.*

Отже, якщо задана крива в будь-якій формі, то знайшовши вектор дотичної до неї за допомогою методів попереднього параграфу і взявши другу похідну, ми знайдемо вектор другої похідної, а цього досить, щоб скласти рівняння стичної площини.

ТРИГРАННИК ФРЕНЕ.

$\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної, $\vec{\nu}$ – одиничний вектор головної нормалі, $\vec{\beta}$ – одиничний вектор бінормалі.

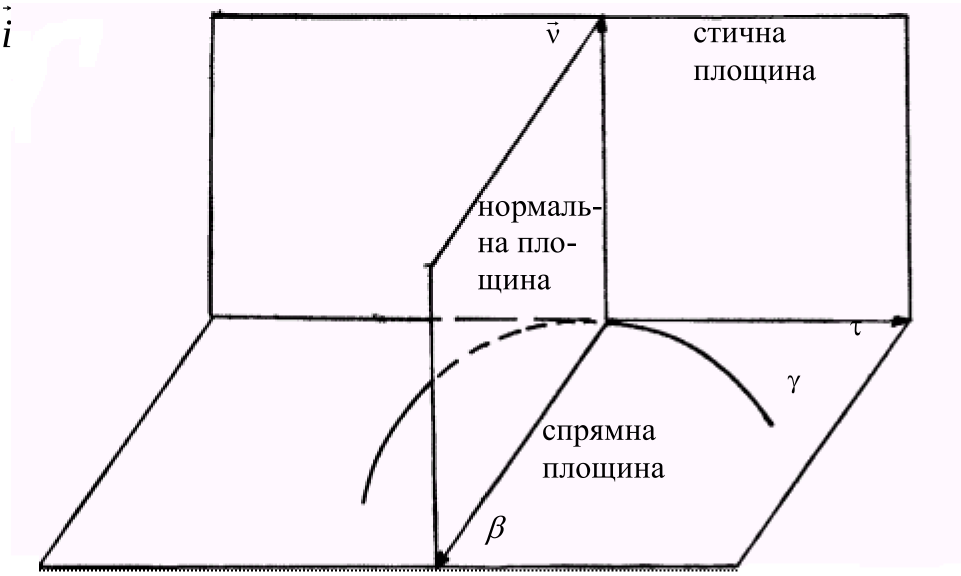
Тригранник Френе називають супровідним тригранником кривої.

$\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ – взаємно перпендикулярні вектори.

Знаючи, що $\overrightarrow{r'}$ і $\overrightarrow{r''}$ лежать в стичній площині, визначимо рівняння елементів тригранника Френе:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(z) \end{cases}$$

$\vec{r} = x(t)\vec{i}$



Напрямний вектор дотичної $\vec{r}'(x', y', z')$. Тоді рівняння дотичної: $\dfrac{x-x_0}{x'} = \dfrac{y-y_0}{y'} = \dfrac{z-z_0}{z'}$.

1) Напрямний вектор бінормалі визначається так:

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}.$$

Тоді рівняння бінормалі запишеться:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} \text{ або } \frac{x-x_0}{x_B} = \frac{y-y_0}{y_B} = \frac{z-z_0}{z_B}.$$

2) Напрямний вектор головної нормалі визначиться так:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B & y_B & z_B \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_B & z_B \\ y' & z' \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} z_B & x_B \\ z' & x' \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x' & y' \end{vmatrix}.$$

Рівняння головної нормалі матиме вигляд:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_B & z_B \\ y' & z' \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_B & x_B \\ z' & x' \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x' & y' \end{vmatrix}} \text{ або } \frac{x-x_0}{x_\Gamma} = \frac{y-y_0}{y_\Gamma} = \frac{z-z_0}{z_\Gamma}.$$

Звідси:

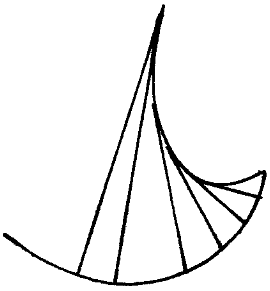
рівняння стичної площини: $x_B(x-x_0) + y_B(y-y_0) + z_B(z-z_0) = 0$;

рівняння нормальної площини: $x'(x-x_0) + y'(y-y_0) + z'(z-z_0) = 0$;

рівняння спрямної площини: $x_\Gamma(x-x_0) + y_\Gamma(y-y_0) + z_\Gamma(z-z_0) = 0$.

ОБГИНАЮЧА СІМЕЙСТВА КРИВИХ. ЕВОЛЮТА.

Нехай лінія на площині задана рівняннями: $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$ (1) і нехай задане сімейство кривих на площині рівнянням: $F(x, y, t) = 0$ (2), де t – параметр сімейства.



Означення. Лінія, задана рівнянням (1), називається обгинаючою сімейства кривих (2), якщо вона має спільні точки з кожною кривою сімейства і вектори дотичних в спільних точках до ліній (1) і ліній сімейства (2) співпадають.

Виведемо умову, з якої знаходиться рівняння обгинаючої сімейства кривих. Оскільки вони повинні мати спільні точки, то (1) підставимо в (2) і отримаємо: $F(x(t), y(t), t) = 0$. Продиференціюємо цей вираз по t. Покажемо, що $F_t=0$. Дійсно, $F_x x'(t) + F_y y'(t) = 0$.

Тому обгинаюча знаходиться з умови: $\begin{cases} F(x, y, t) = 0; \\ F_t = 0. \end{cases}$ (9).

<u>Приклад</u>: Знайти рівняння обгинаючої сімейства нормалей кривої, заданої нормалями: $\gamma: \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$.

Еволюта – *обгинаюча сімейства нормалей*.

Запишемо сімейство нормалей: $\vec{r'} = \{x', y'\}$. Рівняння дотичної буде мати вигляд: $\dfrac{x - x(t)}{x'(t)} = \dfrac{y - y(t)}{y'(t)}$.

$\vec{r'} = (x', y')$ – *нормальний вектор прямої (нормалі).* Запишемо скалярний добуток: $(x - x(t)x'(t)) + (y - y(t)y'(t)) = 0$ (I). Якщо t змінюється, то ми будемо мати сімейство. t – параметр сімейства нормалей.

$(x - x(t)x''(t)) + (y - y(t)y''(t)) - x'^2(t) - y'^2(t) = 0$ (II).

З останніх рівнянь ((I) і (II)) знаходимо рівняння обгинаючої: $y - y(t) = \dfrac{(x - x(t))x'(t)}{y'(t)}$ і підставимо в (II). Отримаємо:

$$(x - x(t)x''(t)) - \frac{(x - x(t)x'(t))}{y'(t)} \cdot y''(t) - x'^2(t) - y'^2(t) = 0.$$

$$x - x(t) = \frac{(x'^2(t) + y'^2(t))y'(t)}{x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)}. \quad \text{Або} \quad x - x(t) = \frac{(x'^2 + y'^2)y'}{x''y' - x'y''}.$$

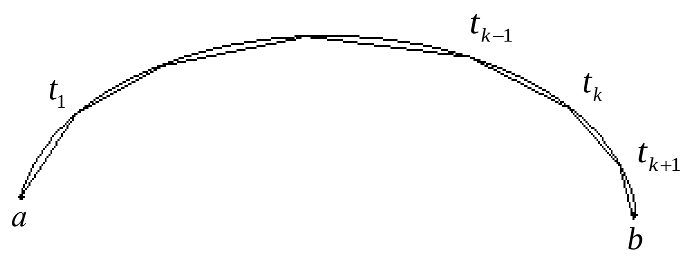
Аналогічно запишемо: $y - y(t) = -\dfrac{(x'^2 + y'^2)x'y'}{(x''y' - x'y'')y'} = -\dfrac{(x'^2 + y'^2)x'}{x''y' - x'y''}$.

$$\left.\begin{aligned} x - x(t) &= \frac{(x'^2 + y'^2)y'}{x''y' - x'y''} \\ y - y(t) &= \frac{(x'^2 + y'^2)x'}{x'y'' - x''y'} \end{aligned}\right\} \text{– рівняння еволюти.}$$

ДОВЖИНА ДУГИ КРИВОЇ.

Нехай крива γ задана рівняннями: $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases}$ (1).

Означення. Довжиною дуги кривої $a \le t \le b$ будемо називати границю суми довжин ламаних, вписаних в криву, при умові, що довжини хорд необмежено зменшуються.



Теорема. Якщо крива задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то довжина відрізка $a \le t \le b$ кривої визначається за формулою $s = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$.

Доведення: Довжина ламаної визначається:

$$\sum_k \left|\vec r(t_k)-\vec r(t_{k-1})\right| = \int_a^b \left|\vec r'(t)\right|dt + \left\{\sum_k (t_k - t_{k-1})\left|\vec r'(t_k)\right| - \int_a^b \left|\vec r'(t)\right|dt\right\} +$$
$$+\left\{\sum_k \left|\vec r(t_k)-\vec r(t_{k-1})\right| - \sum_k (t_k - t_{k-1})\left|\vec r'(t_k)\right|\right\}$$

Третій член в правій частині можна представити у вигляді: $\sum_k \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec r'(t)dt\right| - \sum_k \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec r'(t_k)dt\right|$. Але він не більший, ніж $\sum_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left|\vec r'(t) - \vec r'(t_k)\right|dt$ (за нерівністю трикутника). Так як вектор-функція $\vec r'(t)$ неперервна, то $\left|\vec r'(t) - \vec r'(t_k)\right| < \varepsilon$. Тому третій член не більший $\int_a^b \varepsilon dt = (b-a)\varepsilon$. Тому, якщо довжини хорд необмежено зменшуються, а, отже, зменшуються різниці $t_k - t_{k-1}$, довжина ламаної прямує до границі $s = \int_a^b \left|\vec r'(t)\right|dt$. Теорема доведена.

НАТУРАЛЬНА ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ КРИВОЇ.

r=r(t). Ми можемо записати, що $s = \int_{t_0}^{t} \left|\overrightarrow{r'}(t)\right|dt$. Якщо буде змінюватися параметр *t*, то будемо отримувати множину значень *s* довжини дуги. Ця функція монотонна, бо $s' = |\overrightarrow{r'}(t)| > 0$. Отже, замість *t* можемо брати *s*, бо між ними існує взаємно однозначна відповідність. І тоді рівняння кривої у векторній формі запишеться: $\vec r = \vec r(s)$ – натуральна параметризація кривої, де *s* – натуральний параметр.

Таке рівняння зручне тим, що вектор першої похідної одиничний. Покажемо це.

$$\frac{d\vec r}{ds} = \frac{d\vec r}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\vec r'}{s'}, \text{ але } s' = \left|\vec r'\right|. \text{ Тому } \left|\frac{d\vec r}{ds}\right| = 1.$$

КРИВИНА КРИВОЇ.

Нехай крива задана $\vec r = \vec r(s)$.

Означення. Нехай крива задана рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(s)$, тоді <u>кривиною</u> в її будь-якій точці називається границя відношення приросту кута повороту дотичної до приросту довжини дуги, коли остання прямує до нуля: $k=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta s}$.

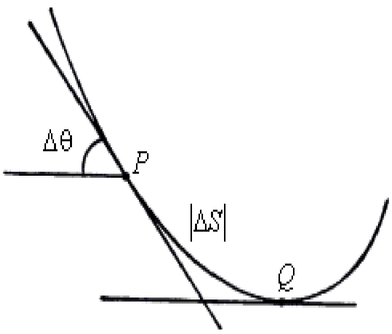
Теорема. Регулярна (двічі неперервна, диференційовна) крива γ в кожній своїй точці має кривину, відмінну від нуля. Якщо крива задана рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(s)$, то кривина виражається за формулою:
$k=\left|\overrightarrow{r''}(s)\right|=\left|\vec{r}_{ss}\right|$.

Доведення:

$$AB=\left|\vec{\tau}(s+\Delta s)-\vec{\tau}(s)\right|,\quad \left|\vec{\tau}(s)\right|=\left|\vec{r}(s)\times\Delta s\right|=1\Rightarrow AB=2\sin\frac{\Delta Q}{2},$$

$$\left|\tau(s+\Delta s)-\tau(s)\right|=2\sin\frac{\Delta Q}{2}.$$

Поділимо обидві частини на Δs і перейдемо до границі, коли $\Delta s\to 0$.



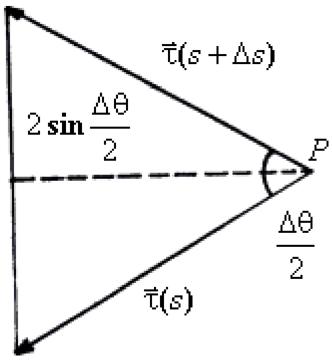
$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\vec{\tau}(s+\Delta s)-\vec{\tau}(s)\right|}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}2\frac{\sin\frac{\Delta Q}{2}}{\Delta s}\cdot\frac{\frac{\Delta Q}{2}}{\frac{\Delta Q}{2}}$$

$$\left|\vec{\tau}'(s)\right|=\lim_{\Delta s\to 0}2\frac{\Delta Q}{2\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta s}=k\Rightarrow k=\left|\vec{r}''(s)\right|.$$

Теорема доведена.

Розглянемо випадок, коли крива задана через звичайний параметр.

Нехай крива γ задана: $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Виразимо похідні по s через похідні по t.



$$\vec{r}=\vec{r}(s(t)),$$

$$\overrightarrow{r'}=\vec{r}_s s',\Rightarrow\overrightarrow{r'}^2=s'^2,\quad \vec{r}_s=\frac{\overrightarrow{r'}}{s'}=\frac{\overrightarrow{r''}}{\sqrt{r'^2}}$$

$$\overrightarrow{r_{ss}}s'=\frac{\overrightarrow{r''}}{\sqrt{r'^2}}+\vec{r}((\overrightarrow{r'^2})^{-\frac{1}{2}})'=\frac{\overrightarrow{r''}}{\sqrt{\overrightarrow{r'^2}}}-\frac{\vec{r}(\overrightarrow{r'}\cdot\overrightarrow{r''})}{(\sqrt{r'^2})^3}$$

Піднесемо обидві частини отриманої рівності до квадрату і врахуємо, що $\overrightarrow{s'^2}=\overrightarrow{r'^2}$.

$$\overrightarrow{r_{ss}^2}s'^2=\frac{\overrightarrow{r''^2}}{\overrightarrow{r'^2}}-2\frac{\overrightarrow{r'}\cdot\overrightarrow{r''}(\overrightarrow{r'}\cdot\overrightarrow{r''})}{(r'^2)^2}+\frac{\overrightarrow{r'^2}(\overrightarrow{r'}\cdot\overrightarrow{r''})^2}{(r'^2)^3}=\frac{\overrightarrow{r'^2}\cdot\overrightarrow{r''^2}-(r'r'')^2}{(r'^2)^3}\Rightarrow$$

Скористаємось формулою:

$$(\vec a\times\vec b)=\left|\vec a\times\vec b\right|\cdot\left|\vec a\times\vec b\right|=\left|\vec a\right|\cdot\left|\vec b\right|\mathbf{sin}\left|\vec a\right|\cdot\left|\vec b\right|\mathbf{sin}\,\alpha=$$

$$=\left|\vec a\right|^2\cdot\left|\vec b\right|^2(1-\mathbf{cos}^2\,\alpha)=\left|\vec a\right|^2\cdot\left|\vec b\right|^2-\left|\vec a\right|^2\cdot\left|\vec b\right|^2\mathbf{cos}\,\alpha=a^2b^2-(\vec a\vec b)^2$$

$\Rightarrow\dfrac{(\overrightarrow{r'}\times\overrightarrow{r''})^2}{(\sqrt{\overrightarrow{r'^2}})^3}$. Маємо:

$k=\left|\overrightarrow{r_{ss}}\right|=\dfrac{\sqrt{(\overrightarrow{r'}\times\overrightarrow{r''})^2}}{(\sqrt{\overrightarrow{r'^2}})^3}$ – *формула для обчислення кривини.*

Якщо крива задана рівняннями *x=x(t), y=y(t), z=z(t)*, то

$$\overrightarrow{r'}\times\overrightarrow{r''}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}y' & z'\\ y'' & z''\end{vmatrix}+\vec j\begin{vmatrix}z' & x'\\ z'' & x''\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}.$$

$$k=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y' & z'\\ y'' & z''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z' & x'\\ z'' & x''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}^2}}{(\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2})^3}$$

Якщо крива плоска, тобто $\begin{cases}x=x(t);\\ y=y(t)\end{cases}$, то $k=\dfrac{x'y''-x''y'}{(\sqrt{x'^2+y'^2})^3}$.

Якщо крива задана рівнянням *y=f(x)*, то $k=\dfrac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}$.

Нехай крива задана рівнянням $\vec r=\vec r(s)$, де s – натуральний параметр. Ми встановили, що $\left|\overrightarrow{r'}(s)\right|=1$. Розглянемо вектор $\vec\nu=\dfrac{1}{k}\vec r''(s)$. Цей вектор одиничний і розміщений в стичній площині кривої. Крім того, він перпендикулярний до вектора $\vec\tau$, так як $\vec\tau^2=1$ і $\vec\tau\cdot\vec\tau'=\vec\tau\cdot\vec\nu\cdot k=0$. Отже, цей вектор направлений по головній нормалі кривої. Вектор $\vec\nu=\dfrac{\vec r''(s)}{k}$ будемо називати вектором кривини. Введемо вектор $\vec\beta=\vec\tau\times\vec\nu$. Цей вектор направлений по бінормалі кривої.

$$\overrightarrow{r_{ss}}=\overrightarrow{\tau_s}=(\overrightarrow{\tau_s})_s,$$

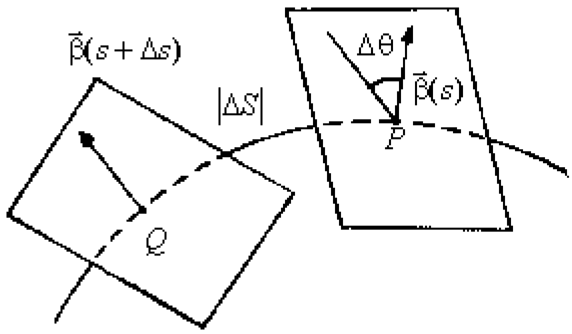
Отже, $\vec{\tau} \perp \vec{\tau}'$. Крім того, він одиничний, $\left|\vec{\nu}\right| = 1$. Отже, це вектор головної нормалі.

СКРУТ КРИВОЇ.

Означення. Скрутом кривої в будь-якій її точці називається границя відношення приросту кута повороту стичної площини до приросту довжини дуги, коли остання прямує до нуля.

Скрут позначимо $\aleph = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta s}$.

Теорема. Регулярна (тричі неперервна, диференційовна) крива γ в кожній своїй точці має скрут, відмінний від нуля і, якщо ця крива задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(s)$, то $\aleph = \dfrac{\left|\overrightarrow{r_s} \times \overrightarrow{r_{ss}} \cdot \overrightarrow{r_{sss}}\right|}{k^2}$, де k – кривина кривої в цій же точці.



Доведення: З малюнка $AB = \left|\vec{\beta}(s+\Delta s) - \vec{\beta}(s)\right|$.

$\left|\vec{\beta}(s+\Delta s) - \vec{\beta}(s)\right| = 2\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}$.

З іншої сторони, $AB = 2\sin\dfrac{\Delta Q}{2}$. Поділимо обидві частини рівності на Δs і перейдемо до границі, коли $\Delta s \to 0$:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left|\vec{\beta}(s+\Delta s) - \vec{\beta}(s)\right|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta Q}{2} \cdot \frac{\Delta Q}{2}}{\Delta s \cdot \frac{\Delta Q}{2}}; \qquad \left|\vec{\beta}'(s)\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \aleph.$$

Покажемо, що $\vec{\beta}(s) \uparrow\uparrow \vec{\nu}$. Для цього покажемо, що він перпендикулярний з $\vec{\tau}$ та $\vec{\beta}'$.

$\vec{\beta} = \vec{\tau} \cdot \vec{\nu} \Rightarrow \vec{\beta}' = \vec{\tau}' \times \vec{\nu} + \tau \times \vec{\nu}' = \tau \times \vec{\nu}'$. Отже, $\vec{\beta}' \perp \vec{\tau}$.

З другого боку $(\beta^2)' = 2\vec{\beta}\vec{\beta}' = 0 \Rightarrow \vec{\beta}' \perp \vec{\beta}$. Отже, $\vec{\beta}' \uparrow\uparrow \vec{\nu}$. Тому $\left|\aleph\right| = \left|\vec{\beta}'\vec{\nu}\right|$.

Виразимо $\vec{\beta}'$ та $\vec{\nu}$ через $\vec{r}(s)$ і підставимо в останню формулу:

$$\vec{\nu}=\frac{\vec{r}''}{k};\quad \vec{\beta}'=(\tau\cdot\vec{\nu})'=\vec{\tau}'\times\vec{\nu}+\vec{\tau}\times\vec{\nu}'=\frac{\vec{r}''\times r''}{k}.$$

Звідси $|\aleph|=\dfrac{\left|\vec{r}\times\vec{r}''\cdot\vec{r}'''\right|}{k^2}$. Теорема доведена.

Покажемо як обчислюється скрут кривої, якщо вона задана через звичайний параметр t. Виразимо похідні $\vec{r_s},\vec{r_{ss}},\vec{r_{sss}}$ через параметр t. Будемо вважати, що $t=t(s)$, тоді:

$$\vec{r_s}=r'\cdot t'\Rightarrow r_s^2=r'^2t'\Rightarrow r'^2=\frac{1}{t'^2},\ \vec{r_{ss}}=\vec{r}''t'^2+\vec{r}'t''.$$

$$\vec{r_{ss}}r'''t'^3+\vec{r}''2t't''+r''t't''+r't''';$$

$$\aleph=\frac{\left|(\vec{r}'\cdot t')\times(r''t'^2+r't'')\cdot(r'''t'^3+4r''t't''+r''t't''+r't'')\right|}{\dfrac{(r'\times r'')^2}{(\overrightarrow{r'^2})^3}}=$$

$$=\frac{\left|r't'\times r''t'^2\cdot r'''t'^3\right|}{\dfrac{(r'\times r'')^2}{(\overrightarrow{r'^2})^3}}$$

Врахуємо, що $t'^2=1,\Rightarrow\dfrac{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\cdot\vec{r}'''\cdot r'^6\right|}{\dfrac{(r'\times r'')^2}{(\overrightarrow{r'^2})^3}}=\dfrac{\left|\vec{r}'\cdot\vec{r}''\cdot\vec{r}'''\right|}{(\vec{r}'\times\vec{r}'')^2}$.

$$\aleph=\frac{\left|\vec{r}'\cdot\vec{r}''\cdot\vec{r}'''\right|}{(\vec{r}'\times\vec{r}'')^2}.$$

Якщо крива задана рівняннями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, то будемо мати:

$$\aleph=\frac{\left\|\begin{matrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{matrix}\right\|}{\begin{vmatrix}y' & z'\\ y'' & z''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z' & x'\\ z'' & x''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}^2}.$$ Знайдемо криві, в яких кожній точці скрут рівний нулеві. Маємо $\aleph=\vec{\beta}'\vec{\nu}=0$. Оскільки $\vec{\beta}'\cdot\vec{\tau}=0$ і $\vec{\beta}'\cdot\beta=0$, то $\vec{\beta}'=0$. Звідси $\vec{\beta}=\vec{\beta}_0=const$. Отже, крива лежить в

площині, заданій векторним рівнянням $(\vec{r}-\vec{r}_0)\vec{\beta}_0=0$, а значить така крива плоска. Отже, якщо крива плоска, то $\aleph=0$.

Розглянемо випадки, в яких кривина та скрут кривих дорівнюють нулеві. Ми показали, що $k=\left|r''(s)\right|=0$. Ми маємо диференціальне рівняння другого порядку. Інтегруючи його 2 рази, ми отримаємо рівняння прямої *as+b=0*. Звідси слідує, що кривина всіх прямих ліній дорівнює нулеві. Крім того, показали, що скрут $\aleph=\left|\overrightarrow{\beta'(s)}\right|=0$. А це значить, що вектор $\vec{\beta}(s)$ будь-якій точці не змінить свій напрям. Якщо це так, то такий вектор буде задавати площину. А оскільки він знаходиться на кривій, то крива лежить в площині. Звідси випливає, що скрут будь-якої плоскої кривої рівний нулеві.

ФОРМУЛИ ФРЕНЕ.

Формули Френе виражають похідні векторів $\vec{\tau},\vec{\nu}$ та $\vec{\beta}$ через самі ці вектори $\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}$. Виведемо ці формули. При виведенні кривини ми отримали, що $\overrightarrow{\nu}=\dfrac{\overrightarrow{r''(s)}}{k}\Rightarrow\overrightarrow{r''}(s)=k\cdot\vec{\nu}$, але $\overrightarrow{r''}(s)=\overrightarrow{\tau'}(s)\Rightarrow\overrightarrow{\tau'}(s)=k\vec{\nu}$.

$\vec{\tau}'=k\vec{\nu}$ – перша формула Френе.

При виведенні формул для обчислення скруту, ми отримали, що $\aleph=\overrightarrow{\beta''}\vec{\nu}\Rightarrow\overrightarrow{\beta'}=\aleph\vec{\nu}$.

$\overrightarrow{\beta'}=\aleph\vec{\nu}$ – третя формула Френе.

$\vec{\nu}=\vec{\beta}\times\vec{\tau},\ \overrightarrow{\nu'}=\vec{\beta}'\times\vec{\tau}+\vec{\beta}\times\vec{\tau}=\aleph\vec{\nu}\times\vec{\tau}+\vec{\beta}\times k\vec{\nu}=-\aleph\vec{\beta}-k\vec{\tau}.$

$\overrightarrow{\nu'}=-(k\vec{\tau}+\aleph\overrightarrow{\beta})$ – друга формула Френе.

А самі рівняння *k=k(s)* і $\aleph=\aleph(s)$ називаються натуральними рівняннями кривої і визначають її в просторі з точністю до положення відносно системи координат.

Зауважимо, що як кривина, так і скрут можуть бути “+” і “–“.

Якщо вектор дотичної обертається проти годинникової стрілки, то кривина вважається додатною, якщо за годинниковою стрілкою, то кривина вважається від’ємною (щодо кривини).

Скрут додатний, якщо поворот стичної площини здійснюється від вектора $\vec{\nu}$ до $\vec{\beta}$ (права трійка). Якщо від $\vec{\beta}$ до $\vec{\nu}$, то скрут від’ємний.

НАТУРАЛЬНІ РІВНЯННЯ КРИВОЇ.

Теорема. Нехай $k(s)$ і $æ(s)$ будь-які регулярні функції, причому $k(s)>0$. Тоді існує і причому єдині, з точністю до положення в просторі, крива, для якої $k(s)$ являється кривиною, а $æ(s)$ – скрутом в точці, що відповідає дузі s.

Доведення. Нехай така крива дійсно існує. Тоді одиничні вектори дотичної, головної нормалі і бінормалі цієї кривої $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ задовільняють системі диференціальних рівнянь: $\begin{cases} \vec{\xi}' = k\vec{\eta} \\ \vec{\eta}' = -k\vec{\xi} - æ\vec{\zeta} \quad (*) \\ \vec{\zeta}' = æ\vec{\eta} \end{cases}$ в силу формул Френе. Отже таку криву ми будемо шукати звертаючись до системи $(*)$.

Нехай $\vec{\xi}(s)$, $\vec{\eta}(s)$, $\vec{\zeta}(s)$ – розв'язок цієї системи, що задовільняє початковим умовам: при $s=s_0$, $\vec{\xi}=\vec{\xi}_0$, $\vec{\eta}=\vec{\eta}_0$, $\vec{\zeta}=\vec{\zeta}_0$, де $\vec{\xi}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{\zeta}_0$ – три одиничні взаємно перпендикулярні вектори. Зрозуміло, що їх мішаний добуток $\left(\vec{\xi}_0\vec{\eta}_0\vec{\zeta}_0\right)=1$.

Покажемо, що вектори $\vec{\xi}(s)$, $\vec{\eta}(s)$, $\vec{\zeta}(s)$ одиничні і взаємно перпендикулярні при будь-якому s і $\left(\vec{\xi}\,\vec{\eta}\,\vec{\zeta}\right)=1$. Для цього обчислимо $\left(\vec{\xi}^2\right)'$, $\left(\vec{\eta}^2\right)'$, $\left(\vec{\zeta}^2\right)'$, $\left(\vec{\xi}\vec{\eta}\right)'$, $\left(\vec{\eta}\vec{\zeta}\right)'$, $\left(\vec{\zeta}\vec{\xi}\right)'$. Використовуючи систему $(*)$ для цих похідних отримуємо

$$\left(\vec{\xi}^2\right)' = 2k\left(\vec{\xi}\vec{\eta}\right),$$
$$\left(\vec{\eta}^2\right)' = -2k\left(\vec{\xi}\vec{\eta}\right) - 2æ\left(\vec{\eta}\vec{\zeta}\right),$$
$$\left(\vec{\zeta}^2\right)' = 2æ\left(\vec{\eta}\vec{\zeta}\right),$$
$$\left(\vec{\xi}\vec{\eta}\right)' = k\left(\vec{\eta}^2\right) - k\left(\vec{\xi}^2\right) - æ\left(\vec{\zeta}\vec{\xi}\right),$$
$$\left(\vec{\eta}\vec{\zeta}\right)' = æ\left(\vec{\eta}^2\right) - æ\left(\vec{\zeta}^2\right) - k\left(\vec{\zeta}\vec{\xi}\right),$$
$$\left(\vec{\zeta}\vec{\xi}\right)' = k\left(\vec{\eta}\vec{\zeta}\right) + æ\left(\vec{\xi}\vec{\eta}\right).$$

Якщо ці рівності розглядати як систему диференціальних рівнянь для обчислимо $\vec{\xi}^2$, $\vec{\eta}^2$, $\vec{\zeta}^2$, $\left(\vec{\xi}\vec{\eta}\right)'$, $\vec{\eta}\vec{\zeta}$, $\vec{\zeta}\vec{\xi}$, то очевидно вона задовольняє значенням $\vec{\xi}^2 = 1$, $\vec{\eta}^2 = 1$, $\vec{\zeta}^2$, $\left(\vec{\xi}\vec{\eta}\right)' = 0$, $\vec{\eta}\vec{\zeta}$, $\vec{\zeta}\vec{\xi} = 0$. З іншої сторони ця система задовольняє значенням $\vec{\xi}^2 = \vec{\xi}^2(s)$, $\vec{\eta}^2 = \vec{\eta}^2(s)$, … $\left(\vec{\zeta}\vec{\xi}\right) = \vec{\zeta}(s)\vec{\xi}(s)$. Обидва ці розв'язки співпадають при $s = s_0$, а отже, згідно теореми про єдиність розв'язку співпадають тотожно. Таким чином для всіх s $\vec{\xi}^2(s) = 1$, $\vec{\eta}^2(s) = 1$, … $\vec{\zeta}(s)\vec{\xi}(s) = 0$.

Покажемо, що мішаний добуток $\left(\vec{\xi}(s)\vec{\eta}(s)\vec{\zeta}(s)\right) = 1$.

Оскільки $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, $\vec{\zeta}$ – одиничні вектори і взаємно перпендикулярні, то $\left(\vec{\xi}\,\vec{\eta}\,\vec{\zeta}\right) = \pm 1$. Мішаний добуток $\left(\vec{\xi}\,\vec{\eta}\,\vec{\zeta}\right)$ неперервно залежить від s, при $s = s_0$ він рівний +1, тому для всіх s він також буде рівний +1.

Розглянемо криву γ, що визначається векторним рівнянням $\vec{r} = \int\limits_{s_0}^{s} \vec{\xi}(s)ds$. Зауважимо, що параметризація кривої γ натуральна. Дійсно довжина відрізка кривої $s_0 s$ буде рівна $\int\limits_{s_0}^{s} \left|\vec{r}\,'(s)\right| ds = \int\limits_{s_0}^{s} \left|\vec{\xi}(s)\right| ds = s - s_0$.

Кривина кривої γ буде рівна $\left|\vec{r}\,''(s)\right| = \left|\vec{\xi}'(s)\right| = k(s)$.

Її скрут:

$$æ = \frac{\left(\vec{r}\,'\,\vec{r}\,''\,\vec{r}\,'''\right)}{k^2} = \frac{\left(\vec{\xi}, k\vec{\eta}, k'\vec{\eta} + k\vec{\eta}\,'\right)}{k^2} = \frac{\left(\vec{\xi}, k\vec{\eta}, k'\vec{\eta} + k\left(-k\vec{\xi} - æ\vec{\zeta}\right)\right)}{k^2} = æ(s)$$

.

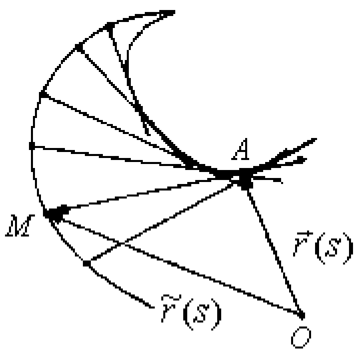
Таким чином крива γ має в точці, що відповідає дузі s кривину $k(s)$ і скрут $æ(s)$.

Існування кривої доведено. Покажемо єдність.

Нехай γ_1 і γ_2 – дві криві що мають однакові у відповідних точках кривину $k(s)$ та скрут $æ(s)$. Сумістимо γ_1 і γ_2 точками, що відповідають дузі s_0 і відповідними тригранниками в цих точках. Нехай $\vec{\tau}_1$, $\vec{\nu}_1$, $\vec{\beta}_1$ і $\vec{\tau}_2$, $\vec{\nu}_1$, $\vec{\beta}_2$ – одиничні вектори дотичних, головних нормалей і бінормалей кривих γ_1 і γ_2 відповідно. Трійки векторів $\vec{\tau}_1(s)$, $\vec{\nu}_1(s)$, $\vec{\beta}_1(s)$ та $\vec{\tau}_2(s)$, $\vec{\nu}_2(s)$, $\vec{\beta}_2(s)$ являється розв'язками системи рівнянь для $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, $\vec{\zeta}$. Початкові значення цих розв'язків співпадають тотожно. Зокрема $\vec{\tau}_1(s) \equiv \vec{\tau}_2(s)$, або $\vec{r}_1'(s) \equiv \vec{r}_2'(s)$. Інтегруючи цю рівність в межах від s_0 до S, отримаємо $\vec{r}_1(s) \equiv \vec{r}_2(s)$. Це значить, що криві γ_1 і γ_2 відрізняються лише положенням в просторі. Теорема доведена.

ЕВОЛЮТА ПЛОСКОЇ КРИВОЇ.

При введенні рівняння обгинаючої сімейства нормалей кривої ми отримали рівняння так званої еволюти і сказали, що еволюта – це обгинаюча сімейства нормалей кривої. Виведемо векторне рівняння еволюти і покажемо, що вона може бути розглянута як геометричне місце центрів кривин кривої в усіх її точках (за додатній напрям дотичної приймається той, який дає поворот дотичної проти годинникової стрілки).



Крива γ задана рівнянням $\vec r = \vec r(s)$.

$$\overrightarrow{OM} = \tilde r, \ \vec{OA} = \vec r, \ \vec{AM} = \frac{1}{k}\vec{\nu}.$$

В кожній точці (A) кривої γ ми будуємо нормаль і на ній відкладаємо радіус кривини $R = \frac{1}{k}$. В результаті ми маємо геометричне місце центрів кривин кривої γ. Запишемо векторне рівняння цього геометричного місця точок. $\tilde r = \vec r(s) + \frac{1}{k}\vec{\nu}$ (1) – рівняння еволюти. Покажемо, що така крива (еволюта) являється огинаючою сімейства нормалей, тобто вектор дотичної до неї буде колінеарним з вектором нормалі до даної кривої γ, продиференціюємо рівняння (1) по s. Будемо мати:

$$\tilde r = \vec r'(s) + \left(\frac{1}{k}\right)'\vec{\nu} + \frac{1}{k}\vec{\nu}', \quad \tilde r' = \vec\tau + \frac{1}{k'}\vec{\nu} + \frac{1}{k}(-k\tau) = \frac{1}{k'}\nu',$$

$$\overrightarrow{\nu'} = -k\tau + \aleph\beta, \quad \aleph = 0, \quad \overrightarrow{\nu'} = -k\vec\tau$$

бо крива плоска. $\tilde r' = \frac{1}{k'}\vec\nu$, тобто вектор дотичної до еволюти колінеарний з вектором нормалі до даної кривої γ. Знайдемо довжину еволюти між двома будь-якими її точками. Довжина еволюти M_1M_2 буде:

$$M_1M_2 = \int_a^b |\tilde r'| ds = \int_a^b \left|\frac{1}{k'}\vec\nu\right| ds = \frac{1}{k}\Big|_a^b = \frac{1}{k(b)} - \frac{1}{k(a)}.$$

Це значить, що довжина еволюти між будь-якими її двома точками дорівнює різниці радіусів кривин в цих точках.

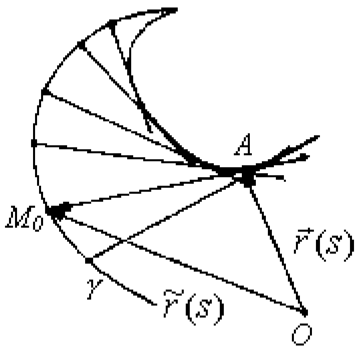
Покажемо як знаходиться рівняння еволюти в координатах, виходячи з векторного рівняння.

$\tilde{r} = \vec{r}(s) = \frac{1}{k}\vec{\nu}$. Вектор $\vec{\nu}$ матиме координати: $\left\{-\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}};\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right\}$.

Нехай $\vec{r} = \vec{r}(t), s = s(t)$. Тоді параметричні рівняння еволюти матимуть вигляд: $\begin{cases} x = x(t) + \frac{1}{k}\cdot\frac{(-y')}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \\ y = y(t) + \frac{1}{k}\cdot\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = x(t) - \frac{(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}y' \\ y = y(t) + \frac{(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}x' \end{cases}$$ – формули знаходження еволюти.

ЕВОЛЬВЕНТА ПЛОСКОЇ КРИВОЇ.



Наглядне зображення евольвенти можна уявити розкручуючи нерозтяжну нитку, натягнуту на частину кривої γ. Тоді кінець нитки опише евольвенту кривої. Починаючи з точки M_0 ми будуємо в кожній точці кривої γ дотичну. І на цій дотичній відкладаємо відрізок, що дорівнює довжині кривої γ від точки M_0 до точки, в якій будуємо дотичну. Зокрема в точці A довжина відрізка на дотичній буде $s=M_0A$. В результаті отримаємо геометричне місце кінців дотичних до кривої γ, довжини яких дорівнюють довжинам кривої, починаючи з точки M_0 до біжучої точки A. Таке геометричне місце точок називається *евольвентою*. Складемо векторне рівняння евольвенти.

$\tilde{r} = \vec{r}(s) - s\vec{\tau}$ – рівняння евольвенти.

$\vec{r}' = \vec{r}'(s) - s'\vec{\tau} - s\vec{\tau}' = -s\vec{\tau} = -sk\vec{\nu}, \quad \tilde{r}' = -sk\vec{\nu}..$ Звідси випливає, що вектор дотичної колінеарний до вектора нормалі кривої. А звідси слідує, що вектор дотичної до кривої γ являється вектором нормалі до евольвенти. Таким чином ми отримали визначну властивість цих кривих: дві криві, якщо одна з них еволюта, то друга для неї буде евольвента і навпаки.

Запишемо формули для знаходження рівняння евольвенти в координатах:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ \tilde{r} = \vec{r}(s) - s\vec{\tau}.$$

$$x = x(t) - \frac{x'\int\sqrt{x'^2 + y'^2}dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$y = y(t) - \frac{y'\int\sqrt{x'^2 + y'^2}dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$