УДК 517.54

А.К. Бахтин, И.Я. Дворак, И.В. Денега (Институт математики НАН Украины, Киев)

Точные оценки произведений внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей в комплексной плоскости

Paper is devoted to extremal problems of geometric function theory of complex variable associated with estimates of functionals defined on systems of non-overlapping domains.

Работа посвящена исследованию экстремальных задач геометрической теории функций комплексного переменного, связанных с оценками функционалов, заданных на системах непересекающихся областей.

В настоящее время задачи об экстремальном разбиении занимают значительное место в геометрической теории функций комплексного переменного и имеют богатую историю (см., например, [1–14]). Многие задачи такого плана сводятся к определению максимума произведения внутренних радиусов на системах попарно неналегающих областей, удовлетворяющих определенным условиям. Подробнее с историей данного вопроса можно ознакомиться в работах [1–14].

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множество натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [5,7,8]).

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Систему точек $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}\right\}$ назовем n-***лучевой***, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$,

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Обозначим при этом $P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$. Данная работа базируется на применении кусочно-разделяющего преобразования, развитого в работах [4,5,8].

Рассмотрим задачу: показать, что максимум функционала

$$J_n(\gamma) = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \qquad (1)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – n-лучевая система точек, расположенная на единичной окружности, B_0, B_∞, $\{B_k\}_{k=1}^n$ – совокупность неналегающих областей, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, $\infty \in B_\infty$, достигается для некоторой конфигурации из областей B_k, B_∞ и точек a_k, $k = \overline{0,n}$, которые имеют n-кратную симметрию.

При $\gamma = \frac{1}{2}$ и $n \geqslant 2$ оценка для функционала (1) для систем непересекающихся областей была впервые получена в работе [4]. В работе [6] результат [4] был усилен. Задача об оценке функционала (1) при начальных значениях натурального параметра n также рассматривалась в статьях [13, 14]. В данной работе получены оценки функционала (1) при $n \in \{2,3\}$ на более широком, нежели в работах [6,13,14], интервале значений параметра γ.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \gamma \leqslant \gamma_2$, $\gamma_2 = 0,71$. *Тогда для любой* 2-*лучевой системы точек* $A_2 = \{a_k\}_{k=1}^2$ *такой, что* $|a_k| = 1$, $k \in \{1,2\}$ *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_0, B_1, B_2, B_∞ ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$), *справедливо неравенство*

$$\left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\gamma r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left[r\left(\Lambda_0, 0\right) r\left(\Lambda_\infty, \infty\right)\right]^\gamma r\left(\Lambda_1, \lambda_1\right) r\left(\Lambda_2, \lambda_2\right),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_1, Λ_2 *и точки* 0, ∞, λ_1, λ_2 — *круговые области и соответственно полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + (4-2\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2.$$

Теорема 2. *Пусть $0 < \gamma \leqslant \gamma_3$, $\gamma_3 = 1,38$. Тогда для любой 3-лучевой системы точек $A_3 = \{a_k\}_{k=1}^{3}$ такой, что $|a_k| = 1$, $k \in \{1,2,3\}$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_1, B_2, B_3, B_∞ ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,3}$), справедливо неравенство*

$$[r\,(B_0, 0)\, r\,(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{3} r\,(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant [r\,(\Lambda_0, 0)\, r\,(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{3} r\,(\Lambda_k, \lambda_k)\,,$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_1, Λ_2, Λ_3 и точки 0, ∞, λ_1, λ_2, λ_3 – круговые области и соответственно полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + (9-2\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2}\, dw^2.$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство основано на применении разделяющего преобразования (см., например, [4, с. 48; 5, с. 27 – 30; 8, с. 120 – 124; 7, с. 87 – 92]). Аналогично [7, с. 261], рассмотрим систему функций $\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $\quad k \in \{1,2\}$. Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k \in \{1,2\}$, обозначает область плоскости ζ, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)}$, $k \in \{1,2\}$, обозначаем область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. Семейство $\{\Omega_k^{(\infty)}\}_{k=1}^{2}$ является результатом разделяющего преобразования произвольной области B_∞ относительно семейств $\{P_k\}_{k=1}^{2}$ и $\{\pi_k\}_{k=1}^{2}$ в точке $\zeta = \infty$. $\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}$,

$k \in \{1,2\}$, $\pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}$. Из определения функций π_k вытекает, что

$$|\pi_k(w)+i| \sim \frac{1}{\alpha_k}\cdot|w-a_k|, \quad w\to a_k, \quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)-i| \sim \frac{1}{\alpha_k}\cdot|w-a_{k+1}|, \quad w\to a_{k+1}, \quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w\to 0, \quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w\to \infty, \quad w\in\overline{P_k}.$$

Используя соответствующие результаты работ [4, с. 54; 5, с. 29], имеем неравенства

$$r\left(B_k,a_k\right) \leqslant \left[(\alpha_k\cdot\alpha_{k-1}) r\left(\Omega_k^{(1)},-i\right) r\left(\Omega_{k-1}^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$$k=1,2, \quad \Omega_0^{(2)} := \Omega_n^{(2)}, \quad \omega_0^{(2)} := \omega_n^{(2)},$$

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{2} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

$$r\left(B_\infty,\infty\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{2} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

На основании соотношений (2) — (4) получаем неравенство

$$J_2(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{2}\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \times$$

$$\times\left(\alpha_k^2\cdot r\left(\Omega_k^{(1)},-i\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},i\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, аналогично работам [7, с. 262; 9, с. 871], из последнего соотношения имеем

$$J_2(\gamma) \leqslant 4\left(\prod_{k=1}^{2}\alpha_k\right)\times$$

$$\times \prod_{k=1}^{2} \left\{ \left(r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right) \right)^{\gamma\alpha_k^2} \cdot \frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, -i\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, i\right)}{4} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Каждое выражение, стоящее в фигурных скобках последнего неравенства, является значением функционала

$$K_\tau = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right) \right]^{\tau^2} \cdot \frac{r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right)}{|a_1 - a_2|^2} \tag{5}$$

на системе неналегающих областей $\{\Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, \Omega_k^{(\infty)}\}$, и соответствующей системе точек $\{0, -i, i, \infty\}$ $(k \in \{1, 2\})$. На основании теоремы 4.1.1 [7, с. 167] и инвариантности функционала (5) получаем оценку

$$K_\tau \leqslant \Phi(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

где $\Phi(\tau) = \tau^{2\tau^2} \cdot |1-\tau|^{-(1-\tau)^2} \cdot (1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$. Тогда

$$J_2(\gamma) \leqslant 4 \cdot \left(\prod_{k=1}^{2} \alpha_k \right) \left[\prod_{k=1}^{2} \Phi(\tau_k) \right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\gamma} \cdot \left[\prod_{k=1}^{2} \left(\tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k = \overline{1, 2}$. Рассмотрим подробнее функцию

$$\Psi(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2}.$$

$\Psi(x)$ – логарифмически выпуклая на промежутке $[0, x_0]$, где $x_0 \approx 0,88441$, $\Psi(x_0) = 0,07002$. На промежутке $(0, x_1]$ ($x_1 \approx 0,58142$ – точка максимума функции $\Psi(x)$, $\Psi(x_1) \approx 0,08674$) функция возрастает от значения $\Psi(0) = 0$ до $\Psi(x_1)$, и убывает на промежутке (x_1, ∞). Далее мы используем метод, предложенный в работе [12]. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{2} \Psi(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{2} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}.$$

Пусть $F(x) = \ln(\Psi(x))$ и $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{2}$ — произвольный экстремальный набор точек выше указанной задачи. Следуя работе [12] непосредственно получаем

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}), \quad k, j = \overline{1, n}, \tag{6}$$

$$F'(x) = 4x \ln x - 2(x-1)\ln|1-x| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}.$$

Легко показать, что функция $F'(x)$ убывает на интервале $(0, x_0]$ и возрастает на (x_0, ∞). На основании соотношения (6) проводим доказательство нашей теоремы. Положим $\Phi(x) = F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t \leqslant 0$, $y_0 \approx -1,06$. Найдем решение уравнения $\Phi(x) = t_k$, $k = \overline{1, 11}$, где t_k пробегает множество $t_1 = -0,1; t_2 = -0,2; t_3 = -0,3; t_4 = -0,4; t_5 = -0,5; t_6 = -0,6; t_7 = -0,7; t_8 = -0,8; t_9 = -0,9; t_{10} = -1; t_{11} = y_0$. Из свойств функции $F'(x)$ следует, что уравнение $\Phi(x) = t_k$ имеет два решения, первое из которых $x_1(t_k) \in (0, x_0]$, а второе $x_2(t_k) \in [x_0, \infty)$. Непосредственные вычисления приводят нас к следующей таблице значений функции $F'(x)$.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$	$2x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$
1	-0,1	0,595614	1,588941		
2	-0,2	0,610729	1,310498	1,906112	2,501726
3	-0,3	0,626917	1,184045	1,794774	2,405503
4	-0,4	0,644375	1,110153	1,737070	2,363987
5	-0,5	0,663378	1,062338	1,706713	2,351088
6	-0,6	0,684325	1,030184	1,693562	2,356940
7	-0,7	0,707842	1,008999	1,693324	2,377640
8	-0,8	0,735017	0,997389	1,705231	2,413073
9	-0,9	0,768137	0,979982	1,714999	2,450016
10	-1	0,814378	0,947119	1,715256	2,483393
11	-1,06	0,884406	0,884406	1,698784	2,513162

Рассмотрим теперь $x_1(t) + x_2(t)$, $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, $k = \overline{1, 10}$. Из свойств функции $F'(x)$ справедливо следующее неравенство

$$x_1(t) + x_2(t) > x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}), \quad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}, \quad k = \overline{1, 10}.$$

Используя выше указанную таблицу, получаем $x_1(t) + x_2(t) > 1,693324$ для всех $t \in (0, y_0]$. То есть, $x_1(t) + x_2(t) > 2\sqrt{\gamma_2} = 1,685229$,

$t \in (0, y_0]$. Далее, аналогично рассуждениям работы [12] имеем, что для экстремального набора $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\}$ возможен только случай, когда $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \in (0,\, x_0]$ и, следовательно, $x_1^{(0)} = x_2^{(0)}$. Для всех $\gamma < \gamma_2$ все предыдущие рассуждения сохраняются. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 повторяет рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, с учетом некоторых особенностей в случае $n = 3$. А именно, на заключительном этапе доказательства теоремы 2 рассмотрев серию решений уравнения $\Phi(x) = t_k$, $k = \overline{1, 11}$ на промежутке $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, $k = \overline{1, 10}$, получаем следующую цепочку неравенств

$$2x_1(t) + x_2(t) > 2x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) \geqslant 2,351088 > 2,349468 = 2\sqrt{\gamma_3}.$$

Далее, делаем заключение, что для экстремального набора $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\}$ возможен только случай, когда $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \in (0,\, x_0]$ и, следовательно, $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)}$.

1. *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений// Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159 — 245.

2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М: Наука, 1966. — 628 с.

3. *Дженкинс Дж.А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

4. *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48 — 66.

5. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного// Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1(295). — С. 3 — 76.

6. *Кузьмина Г.В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2001. — **276**. — С. 253 — 275.

7. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе// Праці ін-ту мат-ки НАН України. — 2008. — **73**. — 308 с.

8. *Дубинин В.Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного// Владивосток: "Дальнаука"ДВО РАН, 2009. — 390с.

9. *Бахтин А.К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности//Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 7. — С. 867 — 886.

10. *Кузьмина Г.В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2003. — **302**. — С. 52 — 67.

11. *Емельянов Е.Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2002. — **286**. — С. 103 — 114.

12. *Ковалев Л.В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности// Дальневосточный матем. сборник. — 1996. — **2**. — С. 96 — 98.

13. *Бахтин А.К., Денега И.В.* Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 2011. — Т.8, №1. — С. 12 — 21.

14. *Бахтін А.К., Вьюн В.Є.* Про деякі нерівності в теорії неперетинних областей / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 2014. — Т.11, №1. — С. 141 — 152.